NGÔ LONG HẬU - NGUYỄN QUANG HANH

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 7

TẬP 1



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGÔ LONG HẬU – NGUYỄN QUANG HANH – V.CẬN

Để học tốt

TOÁN

THCS

7

Tập 1

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I
SỐ HỮU TỈ, SỐ THỰC

§1. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

KIẾN THỨC GIÁO KHOA

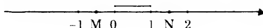
1. Số hữu tỉ

Số hữu tỉ là số được viết dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với a, b $\in \mathbb{Z}$, b $\neq$ 0.

Tập hợp số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

2. Biểu diễn số hữu tỉ trên trục số

• Tia số



Hình 1

• Điểm biểu diễn số hữu tỉ M = $-\frac{1}{2}$ được gọi là điểm $\left(-\frac{1}{2}\right)$, điểm N (h.1) biểu diễn số hữu tỉ N = $\frac{3}{2}$.

3. So sánh hai số hữu tỉ

• Với hai số hữu tỉ bất kì x, y ta luôn có một trong ba khả năng xảy ra : x = y hoặc x < y hoặc x > y.

Ta có thể so sánh hai số hữu tỉ bằng cách viết dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.

Chẳng hạn so sánh 0,5 và $\frac{1}{3}$ ta có : 0,5 = $\frac{1}{2}$ mà $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ nên 0,5 > $\frac{1}{3}$.

Như vậy cho x, y $\in \mathbb{Q}$, x = $\frac{a}{m}$, y = $\frac{b}{m}$ (m > 0)

- $x > y$ nếu $a > b$
- $x < y$ nếu $a < b$
- $x = y$ nếu $a = b$

4. Số hữu tỉ dương, số hữu tỉ âm

$x > 0 \Leftrightarrow x$ là số hữu tỉ dương

$x < 0 \Leftrightarrow x$ là số hữu tỉ âm

5. Chú ý

- $x < y \Leftrightarrow$ điểm x nằm bên trái điểm y trên trục.
- Giữa hai số hữu tỉ x, y ($x < y$) bao giờ cũng có một số hữu tỉ z : $x < z < y$ đó là *tính chất trù mật* của tập hợp các số hữu tỉ.

II. BÀI TẬP

1. a) Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ ($b > 0, d > 0$). Chứng minh rằng $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow$ $ad > bc$.

b) So sánh các số hữu tỉ sau $\frac{11}{16}$ và $\frac{42}{45}$, $\frac{-3}{7}$ và $\frac{-5}{8}$, $\frac{-9}{21}$ và $\frac{13}{-24}$.

2. a) Cho các số hữu tỉ sau : $\frac{-1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{25}{-36}, \frac{7}{8}$ số nào là số hữu tỉ âm, số nào là số hữu tỉ dương.

b) Cho số hữu tỉ $\frac{a}{b} \neq 0$, với điều kiện gì của a, b thì số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ dương $\frac{a}{b}$ âm ?

3. Chứng minh rằng :

a) Nếu $b > 0$ thì $\left(\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1\right)$

b) Nếu $b > 0$ thì $\left(\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1.\right)$

Áp dụng so sánh các phân số sau : $\frac{42}{35}$ và $\frac{43}{36}$; $\frac{50}{51}$ và $\frac{51}{52}$; $\frac{25}{21}$; $\frac{13}{11}, \frac{9}{7}$ và $\frac{5}{4}$.

4. a) Với b > 0, d > 0 chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

b) Tìm ba số hữu tỉ nằm giữa hai số hữu tỉ sau : $\frac{4}{7}$ và $\frac{3}{5}$.

5. Viết các số nguyên 11111, $\underbrace{111...1}_{80 \text{ chữ số } 1}$, dưới dạng $\frac{10^n - 1}{9}$.

6. So sánh hai phân số

$\frac{m+1}{m}$ và $\frac{n-1}{n}$, (m, n ∈ ℤ và m, n > 0)

7. a) Tìm các phân số có mẫu số là 30, lớn hơn $\frac{-2}{5}$ và nhỏ hơn $\frac{-1}{6}$.

b) Tìm các phân số có tử số là −15, lớn hơn $\frac{-5}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{-3}{4}$.

8. Tìm các số nguyên x để cho

a) $A = \frac{-8}{x-2}$ là số nguyên

b) $B = \frac{6}{2x-1}$ là số nguyên

9. Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{m}$ và $\frac{b}{m}$ (m > 0). Chứng tỏ rằng nếu $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ thì $\frac{a}{m} < \frac{a+b}{2m} < \frac{b}{m}$

Áp dụng : Tìm một phân số xen giữa hai phân số $-\frac{3}{5}$ và $-\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

1. a) Dễ dàng có $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ và $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$.

Ta có: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \Rightarrow ad > bc$ (bd > 0 vì b,d > 0)

Ngược lại nếu ad > bc (và bd > 0) $\Rightarrow \frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

Vậy nếu b, d > 0 thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

b) $11 \times 45 < 16 \times 42 \Leftrightarrow \frac{11}{16} < \frac{42}{45}$

$$-24 > -35 \Leftrightarrow \frac{-3}{7} > \frac{-5}{8}$$

$\frac{-9}{21} = \frac{-3}{7}$ mà $-3 \times 24 > 7 \times (-13) \Leftrightarrow \frac{-3}{7} > \frac{-13}{24} \Leftrightarrow$

$$\frac{-3}{7} > \frac{13}{-24} \text{ hay } \frac{-9}{21} > \frac{13}{-24}$$

Ta cũng có thể so sánh $\frac{9}{21}$ và $\frac{13}{24}$ ta có : $9 \times 24 < 21 \times 13$

$\frac{9}{21} < \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{-9}{21} > \frac{13}{-24}$ (nhân hai vế của bất đẳng thức với -1 thì t
được bất đẳng thức mới đổi chiều và tương đương)

2. a) Những số hữu tỉ âm : $\frac{-1}{5}, \frac{25}{-36} = \frac{-25}{36}$

Những số hữu tỉ dương : $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}$.

b) $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương $\Leftrightarrow$ a, b cùng dấu.

$\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ âm $\Leftrightarrow$ a, b trái dấu nhau.

3. a) Theo câu 1. a) nếu b, d > 0 và $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$

$\Leftrightarrow ad + ab > ab + bc \Leftrightarrow a(b + d) > b(a + c)$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + d}$

Nghĩa là ta có :

$$b > 0, d > 0 : \frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

Cho c = d = 1 và b > 0 : $\frac{a}{b} > \frac{a + 1}{b + 1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1$

Hay với b > 0 : $\frac{a}{b} > \frac{a + 1}{b + 1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1$.

b) Chứng minh tương tự.

c) $\frac{42}{35}$ và $\frac{43}{36} = \frac{42+1}{35+1}$ do $\frac{42}{35} > 1 \Rightarrow \frac{42}{35} > \frac{43}{36}$;

$\frac{50}{51} < \frac{51}{52}$; $\frac{25}{21} > \frac{26}{22} = \frac{13}{11}$; $\frac{9}{7} > \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

4. a) Theo 3a, b) : Với $b > 0$, $d > 0$ ta có $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

và $\frac{c}{d} > \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$. Do đó với $b > 0$, $d > 0$

và $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

b) $\frac{4}{7} < \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{15}{26} < \frac{3}{5}$

5. $11111 = \frac{10^5 - 1}{9}$

$\underset{80 \text{ chữ số } 1}{111...1} = \frac{10^{80} - 1}{9}$

6. Với $m, n \in \mathbb{Z}$ và $m, n > 0$ ta có : $\frac{m+1}{m} > 1$, $\frac{n-1}{n} < 1$

suy ra $\frac{m+1}{m} > \frac{n-1}{n}$.

Cách khác : $m, n \in \mathbb{Z}$ và $m, n > 0$ suy ra $(m + 1)n > (n - 1)m$

$\Leftrightarrow \frac{m+1}{m} > \frac{n-1}{n}$.

7. a) Gọi các phân số phải tìm là $\frac{a}{30}$ với $a \in \mathbb{Z}$. Theo đề bài ta có :

$-\frac{2}{5} < \frac{a}{30} < \frac{-1}{6}$; Quy đồng mẫu số ta được :

$\frac{-12}{30} < \frac{a}{30} < \frac{-5}{30}$. Vậy $\frac{-12}{30} < \frac{-11}{30} < \frac{-10}{30} < \frac{-9}{30} < \frac{-8}{30} < \frac{-7}{30} < \frac{-6}{30} < \frac{-5}{30}$.

b) Gọi các phân số phải tìm là $\frac{-15}{a}$ ($a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$). Theo đề bài ta có :

$\frac{-5}{6} < \frac{-15}{a} < \frac{-3}{4}$. Quy đồng tử số : $\frac{-15}{18} < \frac{-15}{a} < \frac{-15}{20}$.

Vậy $\frac{-15}{18} < \frac{-15}{19} < \frac{-15}{20}$.

8. a) $A = \frac{-8}{x-2}$ là số nguyên khi $x - 2 \in$ ư(8). Ta có :

x – 2	–8	–4	–2	–1	1	2	4	8
x	–6	–2	0	1	3	4	6	10
A	1	2	4	8	–8	–4	–2	–1

b) $B = \frac{6}{2x-1}$ là số nguyên khi $2x - 1$ là số nguyên không chia hết cho 2 đồng thời là ư(6). Suy ra $2x - 1 \in \{\pm 1 ; \pm 3\}$. Ta có :

2x – 1	–3	–1	1	3
x	–1	0	1	2
B	–2	–6	6	2

9. Ta có $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ ($m > 0$). Thêm $\frac{a}{m}$ vào 2 vế được :

$$\frac{a}{m} + \frac{a}{m} < \frac{a}{m} + \frac{b}{m} \Leftrightarrow \frac{2a}{m} < \frac{a+b}{m} \Leftrightarrow \frac{a}{m} < \frac{a+b}{2m} \quad (1)$$

Ta có $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ ($m > 0$). Thêm $\frac{b}{m}$ vào 2 vế ta được :

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} < \frac{b}{m} + \frac{b}{m} \Leftrightarrow \frac{a+b}{m} < \frac{2b}{m} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2m} < \frac{b}{m} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{a}{m} < \frac{a+b}{2m} < \frac{b}{m}$

Áp dụng : $\frac{-3}{5} < \frac{-1}{4}$. Quy đồng mẫu số ta có $\frac{-12}{20} < \frac{-5}{20}$

Theo chứng minh trên ta có :

$$\frac{-12}{20} < \frac{-12-5}{2.20} < \frac{-5}{20}. \text{ Vậy } \frac{-12}{20} < \frac{-17}{40} < \frac{-5}{20}$$

§2. CÔNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Cộng, trừ hai số hữu tỉ

Với $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$ $(a, b, m \in \mathbb{Z}, m > 0)$

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$

$$x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$$

2. Quy tắc chuyển vế

Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} : x + y = z \Rightarrow x = z - y.$$

Chú ý : • Trong $\mathbb{Q}$, cũng có tổng đại số như trong $\mathbb{Z}$.

• Trong $\mathbb{Q}$ phép cộng cũng có tính chất như phép cộng trong $\mathbb{Z}$.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Tính tổng sau đây:

a) $\frac{13}{2005} + \frac{2}{2005}$; b) $\frac{2007}{1890} - \frac{7}{1890}$; c) $\frac{12}{2016} + \frac{3}{1008}$.

Giải

a) $\frac{13}{2005} + \frac{2}{2005} = \frac{15}{2005} = \frac{3}{401}$

b) $\frac{2007}{1890} - \frac{7}{1890} = \frac{2000}{1890} = \frac{200}{189}$

c) $\frac{12}{2016} + \frac{3}{1008} = \frac{6}{1008} + \frac{3}{1008} = \frac{9}{1008} = \frac{1}{112}$

Ví dụ 2. Tìm x, biết :

a) $-\frac{1}{2} + x = \frac{3}{2}$; b) $x + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$; c) $\frac{6}{10} - x = \frac{3}{6}$

Giải

a) $-\frac{1}{2} + x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ (theo quy tắc **chuyển vế**)

$= \frac{4}{2} = 2$

Vậy x = 2

b) $x + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{10} - \frac{1}{5}$

$= \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$.

Vậy $x = \frac{1}{10}$

c) $\frac{6}{10} - x = \frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{6}{10} - \frac{3}{6}$

$= \frac{6}{10} - \frac{1}{2}$

$= \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$

Vậy $x = \frac{1}{10}$

III. BÀI TẬP

1. Tính:

a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$; $\frac{-1}{4} + \frac{-1}{2}$; $\frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{2}{5}$

b) $\frac{1}{4} + 0,75$; $3,2 - \left(-\frac{4}{5}\right)$; $\frac{3}{4} + 0,25 - 0,12$.

2. Tính tổng sau :

a) $7\frac{3}{5} + 1\frac{2}{5}$ b) $-3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{4}$; **c)** $-4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{2}$

3. Tìm số a để:

a) $\frac{5a + 10}{7} + \frac{3a}{7}$ là số nguyên;

b) $\frac{2a + 7}{a + 1} + \frac{5 - a}{a + 1} - \frac{a + 9}{a + 1}$ là số nguyên.

4. Một chiếc xe máy đi với vận tốc trung bình 35km/h trong 20km đầu và 45 km/h trong 35 km sau. Tính thời gian cần thiết để đi hết 55 km.

5. Rút gọn

$$A = \frac{2^{12}.3^5 - 4^6.9^2}{(2^2.3)^6 + 8^4.3^5} - \frac{5^{10}.7^3 - 25^5.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.(14)^3}$$

6. Tính theo cách hợp lí

$$M = \frac{1}{9\times10} - \frac{1}{8\times9} - \frac{1}{7\times8} - \frac{1}{6\times7} - \frac{1}{5\times6} - \frac{1}{4\times5} - \frac{1}{3\times4} - \frac{1}{2\times3} - \frac{1}{1\times2}$$

7. Tính theo cách hợp lí :

a) $S_1 = \frac{1}{100\times101} + \frac{1}{101\times102} + \frac{1}{102\times103} + ... + \frac{1}{109\times110}$;

b) $S_2 = 1 - \frac{4}{1\times5} - \frac{4}{5\times9} - \frac{4}{9\times13} - \frac{4}{13\times17} - \frac{4}{17\times21} - \frac{4}{21\times25}$.

8. Với số nguyên x nào thì $A = \frac{x-6}{x-2}$ có giá trị là :

a) số nguyên lớn nhất;

b) số nguyên nhỏ nhất.

9. Tìm cặp số nguyên x, y sao cho :

a) $\frac{x}{4} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$;   b) $\frac{x}{3} - \frac{1}{y-1} = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

1. a) ĐS : $\frac{9}{20}$; $\frac{-3}{4}$; $\frac{97}{120}$.

b) $\frac{1}{4} + 0,75 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; $3,2 - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} = \frac{20}{5} = 4$

$\frac{3}{4} + 0,25 - 0,12 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{12}{100} = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}$

2. a) $7\frac{3}{5} + 1\frac{2}{5} = 7 + 1 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 9$

b) $-3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{4} = \frac{17}{4} - \frac{10}{3} = \frac{51-40}{12} = \frac{11}{12}$

Cách khác $-3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{4} = 3 - 3 + 1\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{4} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$

c) $-4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{2} = -(4 + 3) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = -7\frac{7}{10}$

3. a) $\frac{5a + 10}{7} + \frac{3a}{7} = \frac{8a + 10}{7} = a + 1 + \frac{a + 3}{7}$ là số nguyên

$\Leftrightarrow a + 3 \vdots 7 \Leftrightarrow a = 7k - 3 \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $\frac{2a + 7}{a + 1} + \frac{5 - a}{a + 1} - \frac{a + 9}{a + 1} = \frac{2a + 7 + 5 - a - a - 9}{a + 1} = \frac{3}{a + 1}$ là số nguyên

$\Leftrightarrow 3 \vdots a + 1 \Leftrightarrow a + 1$ là ước của 3. Bởi vậy ta có :

$a + 1 = -3 \Leftrightarrow a = -4$

$a + 1 = -1 \Leftrightarrow a = -2$

$a + 1 = 1 \Leftrightarrow a = 0$

$a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 2$

4. Thời gian đi hết 20 km đầu : $\frac{20}{35}(h) = \frac{4}{7}(h)$

Thời gian đi hết 35 km sau : $\frac{35}{45}(h) = \frac{7}{9}(h)$

Thời gian đi hết 55 km : $\frac{4}{7} + \frac{7}{9} = \frac{85}{63} = 1\frac{22}{63}(h)$

5. $\frac{2^{12}.3^5 - 4^6.9^2}{(2^2.3)^6 + 8^4.3^5} = \frac{(2^2)^6.3^5 - (2^2)^6.(3^2)^2}{2^{12}3^6 + (2^3)^4.3^5} = \frac{2^{12}.3^4(3 - 1)}{2^{12}3^5(3 + 1)} = \frac{1}{6}$

$\frac{5^{10}.7^3 - (5^2)^5.(7^2)^2}{(5^3.7)^3 + 5^9.(2.7)^3} = \frac{5^{10}.7^3(1 - 7)}{5^9.7^3(1 + 2^3)} = \frac{-5.6}{9} = -\frac{10}{3}$

Vậy $A = \frac{1}{6} - \frac{10}{3} = \frac{-19}{6}$

6. $M = -\frac{1}{9\times10} - \frac{1}{8\times9} - \frac{1}{7\times8} - \frac{1}{6\times7} - \frac{1}{5\times6} - \frac{1}{4\times5} - \frac{1}{3\times4} - \frac{1}{2\times3} - \frac{1}{1\times2}$

$= -\frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{10} - 1 = -\frac{9}{10}$

7. a) $S_1 = \frac{1}{100} - \frac{1}{101} + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} + ... + \frac{1}{109} - \frac{1}{110} = \frac{1}{100} - \frac{1}{110} = \frac{1}{1100}$

b) $S_2 = 1 - \left(\frac{4}{1\times 5} + \frac{4}{5\times 9} + \frac{4}{9\times 13} + \frac{4}{13\times 17} + \frac{4}{17\times 21} + \frac{4}{21\times 25}\right)$

$= 1 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{25}\right)$

$= 1 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{25}\right)$

$= 1 - 1 + \frac{1}{25} = \frac{1}{25}$. Vậy $S_2 = \frac{1}{25}$.

8. $A = \frac{x-6}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} - \frac{4}{x-2} = 1 - \frac{4}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 2 \in ư(4)$

Ta có bảng sau :

$x-2$	-4	-2	-1	1	2	4
x	-2	0	1	3	4	6
$A=\frac{x-6}{x-2}$	2	3	5	-3	-1	0

Vậy : Với x = 1 thì giá trị nguyên lớn nhất của A là 5 và với x = 3 thì giá trị nguyên nhỏ nhất của A là −3.

9. a) $\frac{x}{4} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{-x}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{y} = 2 - x$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $2 - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{4}{y} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \in ư(4)$. Ta có :

y	-4	-2	-1	1	2	4
$\frac{4}{y} = 2 - x$	-1	-2	-4	4	2	1
x	3	4	6	-2	0	1

Vậy ta có các cặp số nguyên $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4. \end{cases}$

b) $\frac{x}{3} - \frac{1}{y-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{6} = \frac{1}{y-1}$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = \frac{6}{y-1}$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $2x - 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{6}{y-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y - 1 \in ư(6)$

$y - 1$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	-5	-2	-1	0	2	3	4	7
$2x - 3 = \frac{6}{y-1}$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1
x	1	$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	0	$-\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$	$\frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$	3	$\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$	2

Vậy ta có 4 cặp số nguyên $\begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$.

§3. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Nhân hai số hữu tỉ

$x, y \in \mathbb{Q}$ và $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ ta có: $\boxed{x.y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}}$

2. Chia hai số hữu tỉ

$x, y \in \mathbb{Q}$ và $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ $(y \neq 0)$ ta có: $\boxed{x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}}$

3. Chú ý

- Thương của phép chia số hữu tỉ x cho số hữu tỉ y $(y \neq 0)$ gọi là tỉ số của x và y, kí hiệu là $\frac{x}{y}$, hay $x : y$.
- Phép nhân số hữu tỉ cũng có các tính chất cơ bản như phép nhân các số nguyên : giao hoán, kết hợp, nhân với 1 tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng.
- Số nghịch đảo

Mỗi số hữu tỉ $x \neq 0$ đều có số nghịch đảo kí hiệu là x^{-1} sao cho $x.x^{-1} = 1$.

Vậy ta có $(x^{-1})^{-1} = x$, số nghịch đảo của $\frac{a}{b}$ là $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ và $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

II. BÀI TẬP

1. Tính :

a) $\frac{1}{3}.\frac{1}{5}$; $\frac{8}{25}.\left(\frac{-5}{16}\right)$; $\left(\frac{-22}{15}\right).\left(\frac{-18}{11}\right)$;

b) $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$; $4:\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{-3}{2005}\right):\frac{6}{45}$.

2. Tính :

a) $8.\frac{3}{4}$; $2\frac{3}{8}.3\frac{2}{9}$;

b) $1\frac{4}{5}:\frac{18}{105}$; $\left(-2\frac{3}{2}\right):\frac{14}{4}$.

3. Tính các tổng sau :

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{a(a+1)}$;

b) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{a(a+1)(a+2)}$

4. Tính :

a) $\left(1-\frac{1}{51}\right).\left(1-\frac{1}{52}\right).\left(1-\frac{1}{53}\right).\left(1-\frac{1}{54}\right)...\left(1-\frac{1}{100}\right)$;

b) $\left(\frac{1}{2}-1\right):\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(\frac{1}{4}-1\right):\left(\frac{1}{5}-1\right):...:\left(\frac{1}{50}-1\right)$.

5. Tìm số nguyên a để :

a) Tích hai phân số $\frac{-17}{19}$ và $\frac{a-1}{a+1}$ là số nguyên.

b) Thương hai phân số $\frac{-3}{7}$ và $\frac{a+4}{a-2}$ là số nguyên.

6. Rút gọn :

$$\frac{13^{11}-13^{10}.14}{13^{9}.13.3-13^{10}};\ \frac{5^{8}.4+5^{9}}{5^{7}.15+5^{9}};\ \frac{9^{11}-3^{20}}{3^{18}.7+9^{9}}$$

7. a) Tìm số nghịch đảo của các số hữu tỉ sau :

$$5,\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{2},\ \frac{-3}{5},\ \frac{1}{2}.$$

b) Cho số hữu tỉ $x \neq 0$. Tìm x biết x^{-1} là số nguyên.

c) Tìm các số nguyên mà nghịch đảo của nó là một số nguyên.

8. Cho x, y, z là các số hữu tỉ,

a) Chứng minh luật giản ước của phép cộng các số hữu tỉ :

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y;$$

b) Chứng minh luật giản ước của phép nhân các số hữu tỉ :

$$xz = yz \text{ và } z \neq 0 \Rightarrow x = y.$$

9. Cho x, y là hai số hữu tỉ bất kì. Chứng minh rằng :

a) Nếu $x < y$ thì $x - y < 0$;

b) Ngược lại nếu $x - y < 0$ thì $x < y$.

Hướng dẫn giải

1. ĐS : a) $\frac{1}{15}$; $\frac{-1}{10}$; $\frac{12}{5}$ b) $\frac{5}{4}$; -8 ; $\frac{-9}{802}$

2. a) 6 ; $\frac{87}{8}$;   b) $\frac{21}{2}$; -1.

3. a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$

$$= 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

b) Tính tổng $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)(a+2)}$

Từ công thức $\frac{2}{a(a+1)(a+2)} = \frac{1}{a(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)}$, ta có :

$$\frac{2}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}$$

$$\frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{2}{3.4.5} = \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}$$

...

$$\frac{2}{a(a+1)(a+2)} = \frac{1}{a(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)}$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)(a+2)} =$$

$$\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(a+1)(a+2)}\right] : 2 = \frac{(a+1)(a+2) - 2}{4(a+1)(a+2)}$$

4. a) $\left(1-\frac{1}{51}\right)\left(1-\frac{1}{52}\right)\left(1-\frac{1}{53}\right)...\left(1-\frac{1}{100}\right)$

$$= \frac{50}{51}.\frac{51}{52}.\frac{52}{53}.\frac{53}{54}...\frac{99}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

b) $\left(\frac{1}{2}-1\right):\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(\frac{1}{4}-1\right):\left(\frac{1}{5}-1\right):...:\left(\frac{1}{50}-1\right)$

$$= \frac{-1}{2}:\frac{-2}{3}:\frac{-3}{4}:\frac{-4}{5}:...:\frac{-49}{50}$$

$$= \frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}\times\frac{-4}{3}\times\frac{-5}{4}...\frac{-50}{49} = \frac{-50}{4} = -12{,}5$$

5. a) $-\frac{17}{19}.\frac{a-1}{a+1} = \frac{-17(a-1)}{19(a+1)}$ là số nguyên khi a − 1 là bội của 19 và a + 1 là ước của (− 17)

a + 1	−17	−1	17
a	−18	−2	16
a − 1	$-19 \vdots 19$	$-3 \not\vdots 19$	$15 \not\vdots 19$

Vậy nếu a = −18 thì $\frac{-17(a-1)}{19(a+1)} = \frac{-17.(-18-1)}{19.(-18+1)} = -1$

b) $\frac{-3}{7}:\frac{a+4}{a-2} = \frac{-3(a-2)}{7(a+4)}$ là số nguyên khi a + 4 là ước của (−3) và a − 2 là bội của 7.

a + 4	−3	−1	1	3
a	−7	−5	−3	−1
a − 2	$-9 \not\vdots 7$	$-7 \vdots 7$	$-5 \not\vdots 7$	$-3 \not\vdots 7$

Vậy nếu a = −5 thì : $\frac{-3(a-2)}{7(a+4)} = \frac{-3.(-7)}{7.(-1)} = -3$

6. $\frac{13^{11}-13^{10}.14}{13^9.13.9-13^{10}}:\frac{5^8.4+5^9}{5^7.15+5^9}:\frac{9^{11}-3^{20}}{3^{18}.7+9^9}$

$$= \frac{13^{10}.(13-14)}{13^{10}.(9-1)}:\frac{5^8(4+5)}{5^8(3+5)}:\frac{9^{11}-9^{10}}{9^9.7+9^9}$$

$$= \frac{13^{10}.(-1)}{13^{10}.8}:\frac{5^8.9}{5^8.8}:\frac{9^{10}(9-1)}{9^9(7+1)} = \frac{-1}{8}:\frac{9}{8}:\frac{9}{1} = \frac{-1}{8}.\frac{8}{9}.\frac{1}{9} = \frac{-1}{81}$$

7. a) $\frac{1}{5}, \frac{4}{3}, \frac{2}{7}, \frac{-5}{3}, 2$.

b) Giả sử $x = \frac{a}{b} \neq 0$, nghịch đảo của x là $x^{-1} = \frac{b}{a} = c \in \mathbb{Z}$

Vậy b = ac tức b là bội của c.

Ta lại có $x = \frac{a}{b}$ mà $b = ac \Rightarrow x = \frac{a}{ac} \Rightarrow x = \frac{1}{c}$

Ngược lại $x = \frac{1}{c} \Rightarrow x^{-1} = c \in \mathbb{Z}$

c) Từ b) suy ra x là số nguyên khi và chỉ khi $\frac{1}{c} \in \mathbb{Z} \Rightarrow c = \pm 1$.

Vậy 1 và −1 và chỉ có hai số này là hai số nguyên có nghịch đảo cũng là số nguyên.

8. $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{m}{n}$. Ta biết $x = y \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = cb$

a) $x + z = y + z \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$

$$\Rightarrow \frac{an + bm}{bn} = \frac{cn + dm}{dn} \Rightarrow adn^2 + bdmn = bcn^2 + bdmn (*)$$

Theo luật giản ước của phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{Z}$

$(*) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = y$

b) $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{m}{n}$ $(m \neq 0)$

$xz = yz \Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{m}{n} = \frac{c}{d}.\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{am}{bn} = \frac{cm}{dn} \Rightarrow amdn = bncm$; $admn = bcmn$

$m \neq 0, n \neq 0 \Rightarrow mn \neq 0$, nên từ $admn = bcmn \Rightarrow ad = bc$ (theo luật giản ước của phép nhân trong $\mathbb{Z}$) $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = y$.

9. Cho $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ $(b, d > 0)$. Ta phải chứng minh :

a) Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0$

Thật vậy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow ad - bc < 0$ (tính chất số nguyên) $\Rightarrow$

$\frac{ad - bc}{bd} < 0$ (do $bd > 0$) $\Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0$

b) Chứng minh tương tự.

§4. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ

• Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ x, kí hiệu $|x|$, là khoảng cách từ điểm x đến điểm 0 trên trục số.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Ví dụ : $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\left(= -\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}\ldots$

• $\forall x \in \mathbb{Q}$ ta luôn có $|x| \geq 0$, $|x| = |-x|$ và $|x| \geq x$.

2. Cộng, trừ, nhân, chia số thập phân.

• Để cộng, trừ, nhân, chia số thập phân, ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân, rồi làm theo quy tắc cộng trừ, nhân, chia phân số. Trong thực hành ta thường cộng, trừ, nhân theo quy tắc về giá trị tuyệt đối và về dấu tương tự như đối với số nguyên.

• Khi chia số hữu tỉ x cho số hữu tỉ y ($y \neq 0$) ta chia $|x|$ cho $|y|$ với dấu "+" đằng trước nếu x, y cùng dấu, dấu "−" nếu x, y khác dấu. Ta có thể viết :

$$x, y \in \mathbb{Q},\ x : y = \begin{cases} |x| : |y| \text{ nếu } x, y \text{ cùng dấu} \\ -|x| : |y| \text{ nếu } x, y \text{ khác dấu} \end{cases}$$

Ví dụ : Thực hiện các phép tính sau:

a) (−3,15) + (−2,26) ;   d) (−2,27) : (−0,44)

b) 1,42 − 3,25 ;   e) 5,16 : (−1,32).

c) (−7,07) 2,21 ;

Cách 1. a) $(-3{,}15) + (-2{,}26) = \frac{-315}{100} + \frac{-226}{100} = \frac{-541}{100} = -5{,}41$

b) $1,42 - 3,25 = \frac{142}{100} + \frac{-325}{100} = \frac{142 + (-325)}{100} = \frac{-183}{100} = -1,83$

c) $(-7,07).2,21 = \frac{-707}{100}.\frac{221}{100} = \frac{-(707).221}{10000}$

$= \frac{-156247}{10000} = -15,6247$

d) $(-2,27) : (-0,44) = \frac{-227}{100} : \frac{-44}{100} =$

$= (-227) : (-44) = 5,16$

e) $5,16 : (-1,32) = \frac{516}{100} : \frac{-132}{100} = \frac{-516}{132} = -3,91$

Cách 2. a) $(-3,15) + (-2,26) = -(3,15 + 2,26) = -5,41$

b) $1,42 - 3,25 = -(3,25 - 1,42) = -1,83$

c) $(-7,07).2,21 = -(7,07.2,21) = -15,6247$

d) $(-2,27) : (-0,44) = +(2,27 : 0,44) = 5,16$

e) $5,16 : (-1,32) = -(5,16 : 1,32) = -3,91$

II. BÀI TẬP

1. Tìm giá trị của x, biết :

a) $|x| = 1,25$; b) $|x| = -2,15$;

c) $|2x + 1| = 3$; d) $|x| = 2x - 4$.

2. Ta biết rằng *phần nguyên* của số hữu tỉ x, kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, nên

$$[x] \le x < [x] + 1$$

a) Tìm phần nguyên của mỗi số hữu tỉ sau : $\frac{1}{3}$; 3,45 ; –5,12.

b) Tìm phần nguyên của y, biết :

i) $y - 1 < 5 < y$; ii) $y - 1\frac{2}{3} < -2 < y$;

iii) $y < 10 < y + 1$.

3. *Phần lẻ* của số x kí hiệu là $\{x\}$ được xác định như sau : $\{x\} = x - [x]$

a) Xác định phần lẻ của các số : 11, 21; –5, 12 ; $\frac{1}{3}$;

b) Chứng tỏ rằng với mọi số hữu tỉ x ta đều có :

$$0 \le \{x\} < 1$$

c) Tìm x biết $\{x\} = 0$

4. a) Tìm GTNN của biểu thức :

$$A = |x - 5| + 4 - x.$$

b) Tìm GTLN của biểu thức :

$$B = x + \frac{1}{2} - \left|x - \frac{2}{3}\right|$$

c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức:

$P = |x - 2| + |x - 4|$ đạt giá trị nhỏ nhất,

$Q = |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Số hữu tỉ $\frac{43}{30}$ có thể viết dưới dạng :

$1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}}$. Bộ ba số (x, y, z) là bộ số nào trong các bộ số dưới đây

A. (2, 4, 5) ; B. (3, 4, 5) ; C. (1, 2, 3);

D. (2, 3, 4) ; E. (1, 3, 2).

6. Tính a) $50{,}9 . 49{,}1 - 50{,}8 . 49{,}2$;

b) $7{,}3 . 10{,}5 + 7{,}3 . 15 + 2{,}7 . 10{,}5 + 15.2{,}7$;

c) $\dfrac{(3{,}05 - 2{,}55)(3{,}05 + 2{,}55)}{0{,}35.388 - 28{,}8(20{,}56 - 14{,}501 : 0{,}85)}$;

d) $\dfrac{(9{,}126 : 0{,}65 + 0{,}46) : 7{,}18 + 1{,}48.28{,}2}{(3{,}45 - 0{,}55)(3{,}45 + 0{,}55)}$.

7. Với $x, y, z \in \mathbb{Q}$, chứng minh rằng :

a) $x^{-1} = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$; b) $(xy)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$ $(x, y \neq 0)$;

c) $\frac{xy}{z} = x.\frac{y}{z} = \frac{x}{z}.y$ $(z \neq 0)$ d) $\dfrac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{yz}$ $(y, z \neq 0)$.

8. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\dfrac{(2,1-1,965):(1,2.0,045)}{0,00325:0,013}-\dfrac{1:0,25}{1,6.0,625}$;

b) $\left[\dfrac{\left(2,4+1\frac{5}{7}\right).4,375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\dfrac{\left(2,75-1\frac{5}{6}\right).21}{8\frac{3}{20}-0,45}\right]:\dfrac{67}{200}$.

9. Tìm x, biết :

a) $|0,2x-0,4|:\left(\dfrac{25}{32}\times 6,4\right)=0,4$;

b) $0,5.\left[0,5.|x-0,5|-0,5\right]=0,5$.

10. Tìm tất cả các giá trị của x thoả mãn :

a) $|2x-24,56|+24,56-2x=0$;

b) $|3x+1,5|+3x+4,5=3$.

Hướng dẫn giải

1. a) $x=\pm 1,25$;

b) không có giá trị nào của x để $|x|=-2,15$;

c) $2x+1=\pm 3$

• $2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$

• $2x+1=-3 \Leftrightarrow x=-2$;

d) $|x|=2x-4$.

Điều kiện $2x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$ thì $|x|=2x-4$

$\Leftrightarrow x=\pm(2x-4)$

Nếu $2x-4<0$ thì không có giá trị nào của x để $|x|=2x-4$.

• TH1 : $x=2x-4 \Leftrightarrow x=4$ ($4>2$ nên chấp nhận)

• TH 2 : $x=-(2x-4) \Leftrightarrow x=-2x+4 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ không chấp nhận (do $\dfrac{4}{3}<2$)

Vậy chỉ có $x=4$ thì $|x|=2x-4$.

2. a) $\left[\frac{1}{3}\right] = 0$, $[3{,}45] = 3$, $[-5{,}12] = -6$;

b) i) $y > 5$, $y - 1 < 5 \Rightarrow y < 6 \Rightarrow 5 < y < 6$, nên $[y] = 5$

ii) $y > -2$, $y < -1\frac{2}{3} \Rightarrow -2 < y < -\frac{5}{3} < -1 \Rightarrow -2 < y < -1$, nên $[y] = -2$

iii) $y < 10$, $y > 9 \Rightarrow 9 < y < 10 \Rightarrow [y] = 9$.

3. a) $\{11{,}21\} = 0{,}21$, $\{-5{,}12\} = -5{,}12 - (-6) = 0{,}88$

$\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$, $\left\{-\frac{13}{2}\right\} = -6{,}5 - (-7) = 0{,}5$;

b) Ta đã biết $\{x\} = x - [x]$

mà $[x] \le x < [x] + 1 \Rightarrow 0 \le x - [x] < 1$. Do đó $0 \le \{x\} < 1$;

c) $\{x\} = x - [x] = 0 \Rightarrow x = [x]$, vậy x là số nguyên.

4. a) $A = |x - 5| + 4 - x$

Với $x \ge 5$ thì $A = x - 5 + 4 - x = -1$ (1)

Với $x < 5$ thì $A = 5 - x + 4 - x = 9 - 2x$

Vì $x < 5$ nên $-2x > -10 \Rightarrow A > 9 - 10 = -1$ (2)

Như vậy $A \ge -1$, nên GTNN $A = -1 \Leftrightarrow x \ge 5$;

b) $B = x + \frac{1}{2} - \left|x - \frac{2}{3}\right|$

Với $x \ge \frac{2}{3}$ thì $B = x + \frac{1}{2} - x + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

Với $x < \frac{2}{3}$ thì $B = x + \frac{1}{2} + x - \frac{2}{3} = 2x - \frac{1}{6}$

Nếu $x < \frac{2}{3}$ thì $2x < \frac{4}{3} \Rightarrow B < \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

$\Rightarrow B \le \frac{7}{6} \Rightarrow$ GTLN $B = \frac{7}{6} \Leftrightarrow x \ge \frac{2}{3}$;

c) Ta có $P = \begin{cases} -2x + 6 \text{ nếu } x < 2 \\ 6 \text{ nếu } 2 \le x < 4 \\ 2x - 6 \text{ nếu } x \ge 4 \end{cases}$

- Nếu $x < 2 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow -2x + 6 > -4 + 6 = 2 \Rightarrow P > 2$
- Nếu $2 \le x < 4 \Rightarrow P = 6$
- Nếu $x \ge 4 \Rightarrow 2x \ge 8 \Rightarrow P \ge 8 - 6 = 2$

Vậy GTNN $P = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Ta có $Q = \begin{cases} -3x + 9 \text{ nếu } x < 2 \\ -x + 5 \text{ nếu } 2 \le x < 3 \\ x - 1 \text{ nếu } 3 \le x < 4 \\ 3x - 9 \text{ nếu } x \ge 4 \end{cases}$

- Nếu $x < 2 \Leftrightarrow -3x > -6 \Rightarrow Q > -6 + 9 = 3$
- Nếu $2 \le x < 3 \Leftrightarrow -3 < -x \le -2 \Rightarrow 5 - 3 < Q \le -2 + 5 \Rightarrow 2 < Q \le 3$
- Nếu $3 \le x < 4 \Rightarrow 3 - 1 \le Q < 4 - 1 \Rightarrow 2 \le Q < 3$
- Nếu $x \ge 4 \Rightarrow Q \ge 3$

Vậy GTNNQ $= 2 \Leftrightarrow x = 3$.

5. $\frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$

Vậy $(x, y, z) = (2, 3, 4)$, nên chọn D

6. a) $-0,17$;

b) $15(7,3 + 2,7) + 10,5(7,3 + 2,7) = 10(15 + 10,5) = 255$;

c) Số bị chia $(3,05)^2 - (2,55)^2 = 9,3025 - 6,5025 = 2,8$;

Số chia $0,35.388 - 28,8(20,56 - 14,501 : 0,85) =$

$= 0,35.388 - 28,8\,(20,56 - 17,06)$

$= 0,35.388 - 28,8.3,5 = 135,8 - 100,8 = 35$

Ta có kết quả là : $\frac{2,8}{35} = 0,08$;

d) Số bị chia : $(9,126 : 0,65 + 0,46) : 7,18 + 1,48.28,2$

$= (14,04 + 0,46) : 7,18 + 41,736 = 2,019 + 41,736 = 43,755$

Số chia : $(3,45 - 0,55)(3,45 + 0,55) = 2,9 \times 4 = 11,6$

Ta có kết quả là $43,755 : 11,6 \approx 3,772$.

7. a) $x.x^{-1} = x.\frac{1}{x} = 1\ (x \ne 0)$ hay $x.x^{-1} = 1 \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{x}\ (x \ne 0)$.

b) $(xy).(xy)^{-1} = 1 \Rightarrow (xy)^{-1} = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}.\frac{1}{y} = x^{-1}.y^{-1}\ (x \ne 0, y \ne 0)$;

c) $\frac{xy}{z} = xy.\frac{1}{z} = x.y.z^{-1} = x.(y.z^{-1}) = x.\frac{y}{z} = (xz^{-1}).y$

$= \frac{x}{z}.y\ (z \ne 0)$;

d) HS tự làm.

8. a) $\frac{0,135 : 0,054}{0,25} - \frac{4}{1} = \frac{2,5}{0,25} - 4 = 10 - 4 = 6;$

b) $\left[\frac{\left(\frac{12}{5}+\frac{12}{7}\right).\frac{4375}{1000}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} - \frac{\left(2\frac{3}{4}-1\frac{5}{6}\right).21}{\frac{163}{20}-\frac{45}{100}}\right] : \frac{67}{200}$

$$= \left[\frac{\frac{12}{5}.\frac{35}{8}+\frac{12}{7}.\frac{35}{8}}{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} - \frac{\frac{11}{12}.21}{\frac{163}{20}-\frac{9}{20}}\right] : \frac{67}{200}$$

$$= \left[\frac{\frac{21}{4}+\frac{15}{4}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{77}{4}}{\frac{77}{20}}\right] : \frac{67}{200}$$

$$= (18 - 5) : \frac{67}{200} = \frac{13.200}{67} = \frac{2600}{67}.$$

9. a) $|0,2x - 0,4| : \left(\frac{25}{32} \times 6,4\right) = 0,4$

$\Leftrightarrow |0,2x - 0,4| : 5 = 0,4 \Leftrightarrow |0,2x - 0,4| = 2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0,2x - 0,4 = 2 \\ 0,2x - 0,4 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0,2x = 2,4 \\ 0,2x = -1,6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -8 \end{array}\right.$

vậy $x = 12$ hoặc $x = -8$

b) $0,5.\left[0,5.|x - 0,5| - 0,5\right] = 0,5 \Leftrightarrow 0,5.|x - 0,5| - 0,5 = 1$

$\Leftrightarrow 0,5.|x - 0,5| = 1,5 \Leftrightarrow |x - 0,5| = 3 \Leftrightarrow x - 0,5 = \pm 3$

Vậy $x = 3,5$ hoặc $x = -2,5$.

10. a) $|2x - 24,56| + 24,56 - 2x = 0 \Leftrightarrow |2x - 24,56| = 2x - 24,56$

$\Leftrightarrow 2x - 24,56 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 24,56 \Leftrightarrow x \geq 12,28;$

b) $|3x + 1,5| + 3x + 4,5 = 3 \Leftrightarrow |3x + 1,5| = 3 - 3x - 4,5$

$\Leftrightarrow |3x + 1,5| = -3x - 1,5 \Leftrightarrow 3x + 1,5 \leq 0 \Leftrightarrow 3x \leq -1,5$

$\Leftrightarrow x \leq -0,5.$

§5. LUỸ THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Luỹ thừa với số mũ tự nhiên

Với $x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*, n > 1$,

$$x^n = \underbrace{x.x...x}_{n \text{ lần}}$$

Quy ước $x^0 = 1$ $(x \in \mathbb{Q}, x \neq 0)$

$x^1 = x$

2. Tích của hai luỹ thừa cùng cơ số

$$x^n.x^m = x^{n+m}$$

3. Thương của hai luỹ thừa cùng cơ số

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x \neq 0, m \geq n)$$

4. Luỹ thừa của một luỹ thừa

$$(x^m)^n = x^{m.n}$$

Ví dụ 1. $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$

$(0,2)^2 = 0,2.0,2 = 0,04$; $(-1)^{2005} = -1$

Ví dụ 2. : Viết biểu thức sau thành lũy thừa cơ số $\frac{1}{5}$

a) $\frac{1}{125}.\frac{1}{25}$; b) $\frac{1}{3125}:\frac{1}{25}:\frac{1}{5}$; c) $\left(\frac{1}{125}\right)^2$.

Giải

a) $\frac{1}{125}.\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^3.\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{3+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^5$;

b) $\frac{1}{3125}:\frac{1}{25}:\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^5:\left(\frac{1}{5}\right)^2:\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{5-2}:\frac{1}{5}$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^3:\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$.

c) $\left(\frac{1}{125}\right)^2 = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^6$

II. BÀI TẬP

1. Tính:

a) $2^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2^{-2} + \left[(-2)^2 : \frac{1}{2}\right].8;$

b) $\left[(0,1)^2\right]^0 + \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^2 . \frac{1}{49}.\left[(2^2)^3 : 2^5\right];$

2. Tìm x, biết:

a) $(x + 36)^2 = 1936$;

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} = \frac{81}{625};$

c) $2005^{(2x-1)(2+3x)} = 1$;

d) $\left(\frac{9}{16}\right)^{x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^4;$

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^x . \left(\frac{125}{27}\right)^5 = \frac{81}{625}.$

3. Rút gọn

a) $\dfrac{2^{19}.27^3 + 15.4^9.9^4}{6^9.2^{10} + 12^{10}};$

b) $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^3.(-2)^2}{2(-1)^5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{8}}.$

4. a) Cho $x, y \in \mathbb{Q}^*_+$ chứng tỏ rằng

Nếu $x > y$ thì $x^2 > y^2, x^3 > y^3 \ldots x^n > y^n$ (n là số tự nhiên lớn hơn 1)

b) Sử dụng mệnh đề trên để so sánh :

$$2^{500} \text{ và } 5^{200};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{300} \text{ và } \left(\frac{1}{3}\right)^{200}.$$

c) Viết các số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{75};\ \left(\frac{1}{5}\right)^{50}.$$

5. a) Tìm x, biết :

$$(3x + 1)^4 = (3x - 1)^2;$$

b) Có số hữu tỉ x thoả mãn đẳng thức

$$(3x + 1)^4 + (3x - 1)^2 = 0\ ?$$

6. a) Cho x là số hữu tỉ, m, n là số tự nhiên. Chứng tỏ rằng :

Nếu $x > 1$, $m > n$ thì $x^m > x^n$;

Nếu $0 < x < 1$, $m > n$ thì $x^m < x^n$;

b) So sánh $\left(\frac{5}{3}\right)^{2005}$ và $\left(\frac{5}{3}\right)^{2004}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{1975}$.

7. Tính giá trị của biểu thức :

$$A = \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{x}\right)^2\right]^3\right\}^5 \times \left\{-\left[-(-x)^5\right]^2\right\}^3 \quad (x \neq 0)$$

8. Tìm các cặp số (x, y) thoả mãn các điều kiện sau :

a) $x(x + y) = \frac{5}{12}$ và $y(x + y) = \frac{5}{18}$;

b) $x(x - y) = \frac{2}{45}$ và $y(x - y) = \frac{1}{25}$.

Hướng dẫn giải

1. a) $8 + 3 - \frac{1}{2^2} + \left(4 : \frac{1}{2}\right).8 = 11 - \frac{1}{4} + 64$

$$= 74\frac{3}{4};$$

b) $(0,1)^0 + \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} . \frac{1}{7^2}.2 = 1 + (7^{-1})^{-2}.7^{-2}.2$

$$= 1 + 7^0.2 = 3.$$

2. a) $(x + 36)^2 = 1936 \Leftrightarrow x + 36 = \pm 44$. Vậy $x = 8$ hoặc $x = -80$.

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} = \frac{81}{625} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \Leftrightarrow x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$

$\Leftrightarrow 2005^{(2x-1)(2+3x)} = 1 = 2005^0 \Leftrightarrow (2x-1)(2+3x) = 0$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ hoặc :

d) $\left(\frac{9}{16}\right)^{x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2(x-5)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \Leftrightarrow 2(x-5) = -4 \Leftrightarrow x = 3.$

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^x = \frac{81}{625} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\cdot\frac{125}{27}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$

$\Leftrightarrow 2x = -4$. Vậy $x = -2$

3. a) $\frac{2^{19}.(3^3)^3 + 15.(2^2)^9.(3^2)^4}{6^9.2^{10} + 6^{10}.2^{10}} = \frac{2^9.3^9.2^{10} + 5.2^9.3^9.2^9}{6^9.2^{10} + 6^{10}.2^{10}}$

$= \frac{6^9.2^{10}\left(1 + \frac{5}{2}\right)}{6^9.2^{10}(1+6)} = \frac{\frac{7}{2}}{7} = \frac{1}{2};$

b) $\frac{-\frac{1}{8} - \frac{3^3}{4^3}.4}{-2 + \frac{9}{16} - \frac{3}{8}} = \frac{-\frac{1}{8} - \frac{27}{16}}{\frac{-32+9-6}{16}} = \frac{\frac{-29}{16}}{\frac{-29}{16}} = 1.$

4. $\left.\begin{matrix} x > y \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 > xy$ (1), $\left.\begin{matrix} x > y \\ y > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow xy > y^2$ (2). Từ (1), (2) $\Rightarrow x^2 > y^2$.

$\begin{cases} x^2 > y^2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 > y^2.x$ (3) $\begin{cases} x > y \\ y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow xy^2 > y^3$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow x^3 > y^3$. Cứ tiếp tục như vậy, ta có :

$x^4 > y^4, x^5 > y^5, ..., x^n > y^n$ với mọi $n \geq 2$;

b) $2^{500} = (2^5)^{100} = (32)^{100}$

$5^{200} = (5^2)^{100} = (25)^{100}$ mà $(32)^{100} > (25)^{100} \Rightarrow 2^{500} > 5^{200}$

Tương tự $\left(\frac{1}{2}\right)^{300} > \left(\frac{1}{3}\right)^{200}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4.25} = \left(\frac{1}{16}\right)^{25}$;

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{75} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3.25} = \left(\frac{1}{27}\right)^{25}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{50} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2.25} = \left(\frac{1}{25}\right)^{25}$$

mà $\frac{1}{16} > \frac{1}{25} > \frac{1}{27} \Rightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^{25} > \left(\frac{1}{25}\right)^{25} > \left(\frac{1}{27}\right)^{25}$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{100} > \left(\frac{1}{5}\right)^{50} > \left(\frac{1}{3}\right)^{75}.$$

5. a) $(3x+1)^4 - (3x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow [(3x+1)^2 + (3x-1)][(3x+1)^2 - (3x-1)] = 0$

$(9x^2 + 9x)(9x^2 + 3x + 2) = 0$ (*) mà

$9x^2 + 3x + 2 = \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2 + \frac{27x^2}{4} + 1 > 0\ \forall x$, nên:

$(*) \Leftrightarrow 9x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow 9x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

b) Muốn tổng hai số không âm bằng 0 thì mỗi số hạng đều bằng 0 $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3x + 1 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm. Vậy không có giá trị nào của x thoả mãn đẳng thức đã cho.

6. a) Theo kết quả của câu 4a)

Ta có nếu $x > 1 \Rightarrow x^n > 1^n = 1$

$x < 1 \Rightarrow x^n < 1$.

• Nếu $x > 1$ và $m > n$: $x^{m-n} > 1$, $x^n > 1 \Rightarrow x^{m-n} - 1 > 0$

Xét hiệu $x^m - x^n = x^n(x^{m-n} - 1) > 0 \Rightarrow x^m > x^n$;

• Nếu $0 < x < 1$ và $m > n$ thì $x^m < x^n$ (chứng minh hoàn toàn tương tự)

b) $\frac{5}{3} > 1$ nên $\left(\frac{5}{3}\right)^{2005} > \left(\frac{5}{3}\right)^{2004}$

$\frac{1}{2} < 1$ nên $\left(\frac{1}{2}\right)^{2000} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1975}$;

7. $A = \left\{-\left[\left(-\frac{1}{x}\right)^2\right]^3\right\}^5 \times \left\{-\left[(-x)^5\right]^2\right\}^3 \quad (x \neq 0)$

$= \left\{-\left[-\frac{1}{x^2}\right]^3\right\}^5 \times \left\{-\left[-(-x)^5\right]^2\right\}^3 = \left\{-\left[-\frac{1}{x^6}\right]\right\}^5 . \left\{-\left[x^5\right]^2\right\}^3$

$= \left\{\frac{1}{x^6}\right\}^5 . \left\{-x^{10}\right\}^3 = \frac{1}{x^{30}} . (-x^{30}) = -1;$

8. a) $x(x + y) + y(x + y) = \frac{5}{12} + \frac{5}{18} \Leftrightarrow (x + y)(x + y) = \frac{25}{36}$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 = \left(\frac{\pm 5}{6}\right)^2$

Ta có :

• $\left.\begin{array}{l} x(x + y) = \frac{5}{12} \\ \text{mà } x + y = \frac{5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x.\frac{5}{6} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ \text{mà } x + y = \frac{5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$. Vậy $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

* $\left.\begin{array}{l} x(x + y) = \frac{5}{12} \\ \text{mà } x + y = \frac{-5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x.\frac{-5}{6} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \\ \text{mà } x + y = \frac{-5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{-1}{3}$. Vậy $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-1}{3} \end{cases}$

b) $x(x - y) - y(x - y) = \frac{2}{45} - \frac{1}{15} \Leftrightarrow (x - y)^2 = \frac{-1}{45}$

Vì $(x - y)^2 \geq 0 \neq -\frac{1}{45}$ nên không có cặp số (x, y) nào thoả mãn các điều kiện của đề bài.

Bài đọc thêm

LUỸ THỪA SỐ MŨ NGUYÊN ÂM

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa Với $x \neq 0$, $x \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$$

Lũy thừa với số mũ nguyên âm của **10 thường** được dùng để viết những số rất nhỏ, chẳng hạn : khối **lượng nguyên** tử cacbon bằng $1,99.10^{-26}$ kg.

2. Các phép toán

Các phép toán của lũy thừa số mũ nguyên dương một số hữu tỉ (tích của hai lũy thừa cùng cơ số, thương của hai lũy thừa cùng cơ số ... vẫn đúng với lũy thừa số mũ nguyên âm của **một số hữu** tỉ khác 0.

Ví dụ : Một angstrom là một đơn vị **đo chiều dài** bằng 10^{-8} cm còn 1 cm **bằng** 0,3937 pút. Chiều dài của **sóng ánh** sáng đỏ bằng 8000 angstrom. Chiều dài đó bằng bao nhiêu **pút ?**

Giải

1 angstrom bằng : $10^{-8} \times 3937 \times 10^{-4} = 3937.10^{-8-4} = 3937.10^{-12}$ (pút) 8000 angstrom (8.10^3) bằng : $3937.10^{-12}.8.10^3 = 31496.10^{-12+3} = 31496.10^{-9}$ pút.

II. BÀI TẬP

1. Viết các số sau dưới dạng luỹ thừa của 3 :

a) 1, 3, 9, 27, 81;

b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$.

2. Viết các số sau dưới dạng luỹ thừa của 10.

a) 1, 10, 100, 1000,..., $\underbrace{100...0}_{n \text{ số } 0}$;

b) $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, ..., \frac{1}{\underbrace{100...0}_{n \text{ số } 0}}$.

3. a) Viết các số sau ra số thập phân :

$$0{,}2005.10^4;\ 1{,}999.10^{-3};\ -0{,}824.10^{-5}.$$

b) Người ta thường viết số hữu tỉ x dưới "dạng chuẩn" như sau : $x = a.10^k$ trong đó $0{,}1 \le |a| < 1$ và $k \in \mathbb{Z}$, a gọi là *định trị* của x, k gọi là *bậc* của x. Hãy viết các số sau ra ra dạng chuẩn :

$$0{,}1998\ ;\ 0{,}00521\ ;\ 2{,}01\ ;\ 2006.$$

4. Thực hiện phép tính sau :

a) $2^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2^{-2} + \left[(-2)^2 : \frac{1}{2}\right].8$;

b) $\left[(0{,}15)^3\right]^0 + \left[\left(\frac{1}{7}\right)^2\right]^{-1}.\frac{1}{7^2}\left[(2^3)^2 : 2^5\right]$;

c) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}.\left(\frac{3}{4}\right)^3\right] : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

5. Rút gọn :

a) $\dfrac{128.2^{12}.27^3 + 60.4^8.81^2}{768.6^8.2^3 + 1728.12^7}$;

b) $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{4}\right)^3.(-2)^2}{2.(-1)^9 + \frac{9}{16} - \frac{3}{8}}$.

Hướng dẫn giải

1. a) $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$;

b) $3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, 3^{-4}$.

2. a) $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n$;

b) $10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-n}$.

3. a) $0{,}2005.10^4 = 2005$

$1{,}999.10^{-3} = 0{,}001999$

$-0{,}824.10^{-5} = -0{,}00000824$;

b) $0{,}1998 = 0{,}1998.10^0$; $0{,}521.10^{-2}$, $2{,}01 = 0{,}201.10^1$

$2006 = 0{,}2006.10^4$

4. a) $8 + 3 - \frac{1}{2^2} + \left(4 : \frac{1}{2}\right).8 = 11 - \frac{1}{4} + 64 = 75 - \frac{1}{4} = 74\frac{3}{4}$;

b) $1 + \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}.\frac{1}{7^2}.2 = 1 + (7^{-1})^{-2}.7^{-2}.2$

$= 1 + 2 = 3$;

c) $\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}.\left(\frac{3}{4}\right)^3 : \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^2.\left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^5}{4^5}.\frac{-2^3}{3^3} = \frac{-3^2}{2^7}$.

5. a) $\frac{2^7.2^{12}.3^9 + 2^2.3.5.2^{16}.3^8}{2^7.6.6^8.2^3 + 2^6.3^3.2^7.6^7} = \frac{6^9.2^9(2^4 + 5)}{6^9.2^9(2 + 12)} = \frac{13}{14}$;

b) $\frac{-\frac{1}{8} - \frac{27}{16}}{-2 + \frac{3}{16}} = \frac{-\frac{29}{16}}{\frac{-29}{16}} = 1$.

§6. TỈ LỆ THỨC – TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

2. Tính chất

1) Tính chất cơ bản của tỉ lệ thức (tính chất 1)

Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì ad = bc.

2) Tính chất 2

Nếu ad = bc (a, b, c, d ≠ 0) thì ta có các tỉ lệ thức:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

3. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

Nếu dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

4. Chú ý

Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2 ; 3 ; 4 và viết a : b : c = 2 : 3 : 4

Ví dụ. Khối HS lớp 7 của trường THCS xã Thái Sơn gồm 3 lớp 7A, 7B, 7C. Tìm số HS của mỗi lớp ? Biết số HS của ba lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ với các số 3 ; 4 ; 5 và tổng số HS khối 7 là 120 HS.

Giải

Số HS của ba lớp 7A, 7B, 7C (viết tắt là 7A, 7B, 7C) tỉ lệ với các số 3 ; 4 ; 5 thì ta có :

$$\frac{7A}{3} = \frac{7B}{4} = \frac{7C}{5}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{7A}{3} = \frac{7B}{4} = \frac{7C}{5} = \frac{7A+7B+7C}{3+4+5} = \frac{120}{12} = 10$$

Vậy số HS của lớp 7A là : 10 × 3 = 30 (HS)

Số HS của lớp 7B là : 10 × 24 = 40(HS)

Số HS của lớp 7C là : 10 × 5 = 50(HS)

II. BÀI TẬP

1. Cho tập hợp số B = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Hãy liệt kê tỉ lệ thức có các số hạng khác nhau là các phần tử của B.

2. Lập tất cả các tỉ lệ thức từ 4 số :

a) 5 ; 2 ; 6 và 15;   b) −1 ; 3 ; $\frac{-3}{7}$ và $\frac{1}{7}$.

3. Thử xem các tỉ số sau có lập thành tỉ lệ thức không ?

a) $\frac{20}{28}$ và $\frac{70}{98}$;   b) $7\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}$ và $\frac{3}{7} : \frac{1}{5}$;

c) 0,4 : 10 và 5 : 20.

4. Tìm x biết

a) $x : 25 = 36 : x$; b) $\frac{49}{x} = \frac{x}{169}$;

c) $2\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{5}{12} : x$; d) $x : \frac{1}{5} = \frac{5}{90} : \frac{15}{9}$;

e) $\left(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}\right) : 2\frac{2}{3} = 0{,}1x : 4$;

g) $\left[\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right).2{,}5\right] : (21 - 1{,}25) = x : 5\frac{5}{6}$.

5. Chứng tỏ rằng từ đẳng thức $(a - 2c)(b + 2d) = (b - 2d)(a + 2c)$ ta suy ra tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d \neq 0)$.

6. Tìm x và y biết .

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{20}$ và $xy = 64$; b) $\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{5}$ và $xy = -2$.

7. Tìm x, y, z biết :

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$; $\frac{y}{3} = \frac{5z}{9}$ và $3x + 2y - z = -78$;

b) $\frac{8}{x + 1} = \frac{16}{y + 2} = \frac{24}{z + 3}$ và $2x + 3y - z = -20$.

8. Cho ba số m, n, p khác nhau và khác 0 thoả mãn điều kiện $\frac{m}{n + p} = \frac{n}{m + p} = \frac{p}{m + n}$. Tính giá trị của biểu thức :

$$P = \frac{n + p}{m} + \frac{m + p}{n} + \frac{m + n}{p}.$$

9. Cho các số a, b, c, x, y, z thoả mãn điều kiện

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}.$$

10. Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$. Chứng minh rằng :

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n} = \frac{ta + pc + qm}{tb + pd + qn}$, với $t, p, q \neq 0$;

b) $\frac{ta + pb}{ea + fb} = \frac{tc + pd}{ec + fd}$ (với t, p, e, f $\neq 0$);

c) $\frac{3a + 5b}{2a - 7b} = \frac{3c + 5d}{2c - 7d}$;

d) Áp dụng tìm ba số x, y, z biết rằng $4x = 5y$; $y = 2z$ và $3x + 5y - 2z = 93$.

11. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$ thì :

$$\frac{a}{e} = \left(\frac{a - b + c - d}{b - c + d - e}\right)^4, (a, b, c, d, e \neq 0).$$

12. Cho sáu số $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ thoả mãn các điều kiện : $y_2^2 = y_1y_3$, $y_3^2 = y_2.y_4$, $y_4^2 = y_3.y_5$, $y_5^2 = y_4.y_6$. Chứng tỏ rằng $\frac{y_1}{y_6} = \left(\frac{y_1 + y_2 + ... + y_5}{y_2 + y_3 + ... + y_6}\right)^5$.

13. Một ô tô đi từ A đến B trong thời gian dự định. Sau khi đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường thì ô tô tăng vận tốc lên 20%, do đó đến B sớm hơn được 10 phút. Tính thời gian ô tô đi từ A đến B. (Trích đề thi HSG lớp 7 Hà Nội, 1976)

14. Ba người cùng góp vốn kinh doanh, người thứ nhất góp 98 triệu đồng, người thứ hai góp 126 triệu đồng, người thứ ba góp 114 triệu đồng. Đến cuối năm trừ tất cả các khoản chi họ còn lãi 304,2 triệu đồng. Hỏi mỗi người thu được bao nhiêu tiền lãi, biết rằng số tiền lãi được chia cho mỗi người tỉ lệ với tiền vốn mà người đó đã góp.

15. Ba bạn Tùng, Thanh, Hùng có 150 viên bi. Số bi của bạn Hùng bằng $\frac{3}{7}$ số bi của bạn Tùng, số bi của bạn Thanh bằng $\frac{5}{7}$ số bi của bạn Tùng. Hỏi mỗi bạn có bao nhiêu viên bi ?

Hướng dẫn giải

1. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}; \frac{3}{5} = \frac{6}{10}; \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{4}{8}; \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

2. a) $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$; $\frac{6}{2}=\frac{15}{5}$; $\frac{5}{15}=\frac{2}{6}$; $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$;

b) $-1:3=\frac{1}{7}:\left(-\frac{3}{7}\right)$; $\frac{-3}{7}:3=\frac{1}{7}:(-1)$; $-1:\frac{1}{7}=3:\frac{-3}{7}$; $\frac{-3}{7}:\frac{1}{7}=3:(-1)$.

3. a) $20.98=28.70=1960 \Leftrightarrow \frac{20}{28}=\frac{70}{98}$;

b) $7\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}=\frac{15}{2}:\frac{7}{2}=\frac{15}{7}$;

$\frac{3}{7}:\frac{1}{5}=\frac{15}{7} \Rightarrow 7\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}=\frac{3}{4}:\frac{1}{5}$

c) $0,4:10=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$, $5:20=\frac{1}{4}$ mà $\frac{4}{100}\neq\frac{1}{4}$

nên tỉ số ở c) không lập thành tỉ lệ thức.

4. a) $x:25=36:x$. Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có : $x^2=25.36 \Leftrightarrow x=\pm 30$;

b) $\frac{49}{x}=\frac{x}{169}$. Theo tính chất tỉ lệ thức ta có $x^2=49.169$

$\Leftrightarrow x=\pm 91$;

c) $2\frac{3}{4}.x=\frac{1}{2}.\frac{5}{12} \Rightarrow x=\frac{5}{24}:\frac{11}{4}=\frac{5}{66}$;

d) $\frac{15}{9}.x=\frac{1}{5}.\frac{5}{90} \Rightarrow x=\frac{1}{90}:\frac{15}{9}=\frac{1}{150}$;

e) $2\frac{2}{3}.x=\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right).4$

$=\left(1+\frac{37}{30}-\frac{5}{18}\right).4=4+\frac{74}{15}-\frac{10}{9}$

$=4+\frac{222-50}{45}=4+\frac{172}{45}=\frac{352}{45}$

$\Rightarrow x=\frac{352}{45}:\frac{8}{3}=\frac{352.3}{45.8}=\frac{44}{15}$;

g) $x=\left\{\left[\left(\frac{33}{5}-\frac{45}{14}\right).\frac{5}{2}\right].\frac{35}{6}\right\}:\left(21-1\frac{1}{4}\right)$

$x=\frac{237}{28}.\frac{35}{6}:\frac{79}{4}=\frac{79.5}{4.2}.\frac{4}{79}=\frac{5}{2}$.

5. $(a - 2c)(b + 2d) = (b - 2d)(a + 2c)$

$\Leftrightarrow ab + 2ad - 2bc - 4cd = ab + 2bc - 2ad - 4cd$

$\Leftrightarrow 2ad + 2ad = 2bc + 2bc \Leftrightarrow 4ad = 4bc$

$\Leftrightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $(a, b, c, d \neq 0)$.

6. a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{20} = k \Rightarrow x = 5k$; $y = 20.k \Rightarrow xy = 100k^2$

mà $xy = 64$ nên $100k^2 = 64 \Leftrightarrow k = \pm 0,8$

Vậy $\begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -4 \\ y = -16 \end{cases}$;

b) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = k \Rightarrow x = 3k + 1$; $y = 5k - 2 \Rightarrow xy = (3k + 1)(5k - 2)$

$= 15k^2 - k - 2$ mà $xy = -2$ nên $15k^2 - k - 2 = -2 \Leftrightarrow k(15k - 1) = 0$

$\Rightarrow k = 0$ hoặc $k = \frac{1}{15}$. Vậy $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$.

7. a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ nhân 2 vế với $\frac{1}{3}$ được $\frac{x}{6} = \frac{y}{15}$ (1)

$\frac{y}{3} = \frac{5z}{9}$ nhân 2 vế với $\frac{1}{5}$ được : $\frac{y}{15} = \frac{z}{9}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x}{6} = \frac{y}{15} = \frac{z}{9} = \frac{3x}{18} = \frac{2y}{30} = \frac{z}{9} = \frac{3x + 2y - z}{18 + 30 - 9}$

$= \frac{-78}{39} = -2$.

Vậy $\begin{cases} x = -12 \\ y = -30; \\ z = -18 \end{cases}$

b) $\frac{8}{x+1} = \frac{16}{y+2} = \frac{24}{z+3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{8} = \frac{y+2}{16} = \frac{z+3}{24} \Leftrightarrow$

$\frac{x}{8} + \frac{1}{8} = \frac{y}{16} + \frac{2}{16} = \frac{z}{24} + \frac{3}{24} \Leftrightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{16} = \frac{z}{24} = \frac{2x}{16}$

$$= \frac{3y}{48} = \frac{z}{24} = \frac{2x + 3y - z}{16 + 48 - 24} = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$$ Vậy $\begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \\ z = -12 \end{cases}$

8. Theo đề bài ta có $\frac{m}{n+p} = \frac{n}{m+p} = \frac{p}{m+n} \Leftrightarrow \frac{m}{n+p} + 1 = \frac{n}{m+p} + 1 = \frac{p}{m+n} + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{m+n+p}{n+p} = \frac{m+n+p}{m+p} = \frac{m+n+p}{m+n}$$

$$\Leftrightarrow (m+n+p).\frac{1}{n+p} = (m+n+p).\frac{1}{m+p}$$

$$= (m+n+p).\frac{1}{m+n}$$

Vì ba số m, n, p khác nhau và khác 0, nên đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow m+n+p = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+n = -p \\ m+p = -n \\ n+p = -m \end{cases}$$

Thay vào $P = \frac{m}{n+p} + \frac{n}{m+p} + \frac{p}{m+n} = \frac{m}{-m} + \frac{n}{-n} + \frac{p}{-p} = (-1) + (-1) + (-1)$

$= -3.$

9. Đặt $t = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Rightarrow x = at, y = bt, z = ct$

$\frac{bz - cy}{a} = \frac{bct - bct}{a} = 0$, tương tự có $\frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = 0$

Do đó $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$.

10. Với $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ và $t, p, q \neq 0 \Rightarrow \frac{ta}{tb} = \frac{pc}{pd} = \frac{qm}{qn}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n} = \frac{ta + pc + qm}{tb + pd + qn}$ (theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau)

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow$ (áp dụng a)

suy ra $\frac{ta + pb}{ca + fb} = \frac{tc + pd}{ec + fd}$

c) Áp dụng b) với t = 3, p = 5, e = 2, f = −7, ta có:

$$\frac{3a+5b}{2a-7b} = \frac{3c+5d}{2c-7d};$$

d) 4x = 5y, y = 2z nên 4x = 5y = 10z $\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4}$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2} = \frac{3x+5y-2z}{3.5+5.4-2.2} = \frac{93}{31} = 3.$$

11. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{a-b+c-d}{b-c+d-e}$ Suy ra :

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a-b+c-d}{b-c+d-e} \\ \frac{b}{c} &= \frac{a-b+c-d}{b-c+d-e} \\ \frac{c}{d} &= \frac{a-b+c-d}{b-c+d-e} \\ \frac{d}{e} &= \frac{a-b+c-d}{b-c+d-e} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{e} = \left(\frac{a-b+c-d}{b-c+d-e}\right)^4$$

Vậy $\frac{a}{e} = \left(\frac{a-b+c-d}{b-c+d-e}\right)^4$

12. $y_2^2 = y_1.y_3 \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3}$ (1)

$y_3^2 = y_2.y_4 \Rightarrow \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}$ (2)

$y_4^2 = y_3.y_4 \Rightarrow \frac{y_3}{y_4} = \frac{y_4}{y_5}$ (3)

$y_5^2 = y_4.y_6 \Rightarrow \frac{y_4}{y_5} = \frac{y_5}{y_6}$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4} = \frac{y_4}{y_5} = \frac{y_5}{y_6}$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}$$

....

$$\frac{y_5}{y_6} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6}$$

Nhân vế với vế của các đẳng thức trên, ta có

$$\frac{y_1}{y_6} = \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6}\right)^5.$$

13. Gọi M là trung điểm của AB. Ô tô đến B sớm hơn dự định vì tăng tốc từ M.

Gọi V_1 km/h là vận tốc dự định, vận tốc tăng là V_2 km/h.

Theo đề bài ta có $V_2 = \frac{120}{100}V_1 = \frac{6}{5}V_1$

Thời gian đi từ M đến B với vận tốc V_1 thời gian t_1, đi với vận tốc V_2 thời gian đi là t_2. Thì ta có

$$V_1.t_1 = V_2t_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 - t_2}{6-5} = 10$$

$\Rightarrow t_1 = 60$ phút, $t_2 = 50$ phút.

Vậy thời gian ô tô đi từ A đến B là : 60 + 50 = 110 phút

= 1 giờ 50 phút.

14. Gọi x, y, z theo thứ tự là số tìm mà người thứ nhất, thứ hai, thứ ba được lĩnh tiền lãi.

Theo đề bài ta có :

$$\frac{x}{98} = \frac{y}{126} = \frac{z}{114}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x}{98} = \frac{y}{126} = \frac{z}{114} = \frac{x+y+z}{98+126+114} = \frac{304,2}{338} = 0,9$$

Số tiền người thứ nhất được lĩnh :

$x = 98.0,9 = 88,2$ (triệu đồng)

Số tiền người thứ hai được lĩnh :

$y = 126.0,9 = 113,4$ (triệu đồng)

Số tiền người thứ ba được lĩnh :

$z = 114.0,9 = 102,6$ (triệu đồng)

15. Gọi x, y, z theo thứ tự là số bi của bạn Tùng, Thanh, Hùng

Theo đề bài ta có $y = \frac{5}{7}x$, $z = \frac{3}{7}x$ mà $\frac{y}{5} = \frac{x}{7}$ và $\frac{z}{3} = \frac{x}{7}$. Do đó ta có

$\frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3} \Rightarrow$

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{7+5+3} = \frac{150}{15} = 10.$$

Vậy số bi của bạn Tùng là : $x = 10.7 = 70$ (viên)

Số bi của bạn Thanh là : $y = 10.5 = 50$ (viên)

Số bi của bạn Hùng là : $z = 10.3 = 30$ (viên)

§7. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Số thập phân hữu hạn :

Ví dụ $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$, $\frac{1}{10} = 0,1$ ... là số thập phân hữu hạn

2. Số thập phân vô hạn tuần hoàn :

Ví dụ $\frac{1}{3} = 0,333$ ... $\frac{5}{11} = 0,54$

$$\frac{17}{12} = 1,41666...$$

Số 3 trong số 0,333... ; số 54 trong số 0,5454..., số 6 trong số 1,4166... gọi là chu kì của số thập phân vô hạn tuần hoàn.

0,333... được viết gọn là 0,(3) ; 0,54 ... được viết gọn là 0,(54) ; 1,4166 ... viết gọn là 1,41(6)

3. Nhận xét

- Nếu một phân số tối giản với mẫu số dương mà mẫu số không chứa thừa số nguyên tố nào khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.
- Nếu một phân số tối giản với mẫu số dương và mẫu số có chứa các thừa số nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

• Như vậy mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

Mở rộng : Số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn, tuần hoàn tạp.

1) Số $\frac{1}{3} = 0,333 \ldots = 0,(3)$, số $0,666\ldots = 0,(6)$ số $\frac{10}{7} = 1,(428571)$ là những số thập phân tuần hoàn đơn.

2) Số $\frac{1}{6} = 0,1666 \ldots = 0,1\,(6)$; số $1,3\,(135)$

là những số thập phân tuần hoàn tạp phần thập phân đứng bên trái chu kì đầu tiên gọi là phần bất thường ở số 1,3 (135) thì 1,3 là phần bất thường.

3) Đổi số thập phân tuần hoàn đơn thành phân số ta làm như sau : Lấy phần nguyên của nó cộng với phân số có tử số là chu kì, mẫu số là một số gồm các chữ số 9, số các chữ số 9 bằng số các chữ số của chu kì.

Chẳng hạn $0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $1,(23) = 1 + \frac{23}{99} = \frac{112}{99}$

4) Đổi số thập phân tuần hoàn tạp thành phân số ta làm như sau. Lấy phần bất thường cộng với phần chu kì đã đổi thành phân số, chẳng hạn đổi số 1,3 (135) thành phân số.

Ta có : $1,3(135) = 1,3 + 0,0(135) = 1,3 + \frac{1}{10}\cdot\frac{135}{999}$

$$= \frac{13}{10} + \frac{135}{9990} = \frac{13122}{9990}$$

Đổi 2,12 (13) thành phân số :

$$2,12\,(13) = 2,12 + 0,00(13) = \frac{212}{100} + \frac{1}{100}\cdot\frac{13}{99}$$

$$= \frac{21001}{9900}$$

II. BÀI TẬP

1. Biểu diễn các số hữu tỉ sau dưới dạng số thập phân.

$$\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{6}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}; \frac{9}{3}; \frac{10}{3}.$$

2. Biểu diễn các số thập phân sau dưới sạng phân số

0,1 ; 0,(1) ; 0,1(3) ; 2,2(31).

3. Tính

a) $1,1(35) + 2,(13)$;

b) $0,(6) + 0,8(3) - 0,75$;

c) $4,7(3) \times 5,(11)$;

d) $6,(18) : 3,(54)$.

4. Rút gọn $M = \dfrac{0,5 + 0,(3) - 0,1(6)}{2,5 + 1,(6) - 0,8(3)}$

5. Chứng tỏ rằng :

a) $0,(142857) + 0,(857142) = 1$;

b) $1,1(25) + 0,8(74) = 2$;

c) $3,(285714).\ 7 = 23$;

d) $0,(3) : 0,1(6) = 2$.

6. Giải phương trình:

a) $0,(3) \times x = 1$;

b) $0,(6) \times x = 1,(6)$;

c) $368x = 1,1(15)$.

7. Cho :

$$A = \frac{21}{\overline{1x}} \text{ (mẫu số } \overline{1x} \text{ là số có hai chữ số)}$$

Thay x bằng các chữ số từ 0 đến 9 rồi viết A dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

Hướng dẫn giải

1. $\frac{1}{3} = 0,(3)$; $\frac{2}{3} = 0,(6)$; $\frac{3}{3} = 1$; $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1,(3)$;

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1,(6)$; $\frac{6}{3} = 2$; $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} = 2,(3)$;

$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} = 2,(6)$; $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3,(3)$.

2. $0,1 = \frac{1}{10}$; $0,(1) = \frac{1}{9}$;

$$0,1(3) = 0,1 + 0,0(3) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}.0,(3) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}.\frac{3}{9}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{4}{30};$$

$$2,2(31) = 2,2 + 0,0(31) = \frac{22}{10} + \frac{1}{10}.\frac{31}{99}$$

$$= \frac{11}{5} + \frac{31}{990} = \frac{2209}{990}.$$

3. a) $1,1(35) + 2,(13) = \frac{11}{10} + \frac{35}{990} + 2 + \frac{13}{99} = 3\frac{264}{990} = 3,2(6);$

b) $0,(6) + 0,8(3) - 0,75 = \frac{6}{9} + \frac{8}{10} + \frac{1}{10}.\frac{3}{9} - \frac{3}{4};$

$= \frac{2}{3} + \frac{8}{10} + \frac{1}{30} - \frac{3}{4} = \frac{15}{10} = 1,5$

c) $4,7(3) \times 5,(11) = (4,7 + 0,0(3)) \times (5 + 0,(11))$

$= \left(\frac{47}{10} + \frac{1}{10}.\frac{3}{9}\right) \times \left(5 + \frac{11}{99}\right)$

$= \frac{144}{30}.\frac{46}{9} = \frac{736}{30} = 24,5(3).$

4. $M = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{5}{2} + 1\frac{2}{3} - \frac{5}{6}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}} = 20.$

5. a) $0,(142857) + 0,(857142) = \frac{142857}{999999} + \frac{857142}{999999} = \frac{999999}{999999} = 1;$

b) $1,1(25) + 0,8(74) = \frac{1114}{990} + \frac{866}{990} = \frac{1980}{990} = 2;$

c) $3,(285714).7 = \left(3 + \frac{285714}{999999}\right)7 = \left(3 + \frac{2}{7}\right).7 = 23;$

d) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2.$

6. a) $\frac{1}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = 3;$

b) $\frac{2}{3}x = 1 + \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = 2,5;$

c) $368x = 1,1(15)$

$\Leftrightarrow 368x = \frac{11}{10} + \frac{1}{10}.\frac{15}{99}$

$\Leftrightarrow 368x = \frac{368}{330}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{330} = 0,00(30).$

7.

x	$A = \frac{21}{\overline{1x}}$
0	$\frac{21}{10} = 2,1$
1	$\frac{21}{11} = 1,(90)$
2	$\frac{21}{12} = \frac{7}{4} = 1,75$
3	$\frac{21}{13} = 1,(615384)$
4	$\frac{21}{14} = \frac{3}{2} = 1,5$
5	$\frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1,4$
6	$\frac{21}{16} = 1,3125$
7	$\frac{21}{17} = 1,(2352941176470588)$
8	$\frac{21}{18} = \frac{7}{6} = 1,1(6)$
9	$\frac{21}{19} = 1,(105263157894736842)$

§8. LÀM TRÒN SỐ

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Quy ước làm tròn số

Trường hợp 1. Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số định bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

Ví dụ 1. Làm tròn số 67,3649 đến chữ số thập phân thứ hai, chữ số đầu tiên định bỏ đi là 4 nhỏ hơn 5 nên giữ nguyên phần còn lại. Vậy 67,3649 ≈ 67,36

Ví dụ 2. Làm tròn số 45786340 đến hàng nghìn :

45786340 ≈ 45786000 (tròn nghìn)

Trường hợp 2. Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số định bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng chữ số 0.

Ví dụ 1. Làm tròn số 51,4672 đến chữ số thập phân thứ nhất.,

51,4672 ≈ 51,5.

Ví dụ 2. Làm tròn số 54552 đến hàng nghìn

54552 ≈ 55000 (tròn nghìn)

Ví dụ 3. Làm tròn số 0,666... đến chữ số thập phân thứ nhất, ta có 0,666 ... ≈ 0,7.

2. Áp dụng

Để dễ nhớ, dễ ước lượng, dễ tính toán các số có nhiều chữ số người ta thường làm tròn số.

Chẳng hạn 3942 × 67459 ≈ 4000 × 67 000 = 268 000000. Như vậy ước lượng kết quả là 268 triệu.

Ta có 3942 × 67459 = 265923378

II. BÀI TẬP

1. Làm tròn các số sau đến hàng đơn vị :

31525,7 ; 821,4 ; 0,812 ; 0,41.

2. Làm tròn các số sau đến chữ số thập phân thứ nhất (tròn đến mười) :

84,52 ; 15,616 ; 1,059 ; 8,149.

3. Làm tròn các số sau đến phần trăm, phần nghìn

87,5469 ; 52,5337 ; 61,9152 ; 34,0517.

4. Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật chính xác đến phần mười có chiều dài 13,53m, chiều rộng 7,17m.

5. Giá trị (làm tròn đến số thập phân thứ hai) của biểu thức :

$$N = 1,854 \times \frac{35}{19,827} \text{ là}$$

A. 3 B. 3,2 C. 3,27 D. 3,28 E. 3,28

6. In-sơ (inch), kí hiệu: in, là đơn vị đo độ dài theo hệ thống Anh, Mĩ 1in ≈ 2,54 cm.

Người ta nói ti vi loại 29 in-sơ, nghĩa là đường chéo màn hình của chiếc ti vi này dài 29 in. Vậy đường chéo màn hình của chiếc ti vi này dài bao nhiêu xentimét ?

7. Hết học kì I, điểm Toán của 4 bạn như sau :

Họ và tên	Hệ số 1	Hệ số 2	Hệ số 3	TB học kì I
Ngô Văn An	5 ; 7 ; 6 ; 9	6 ; 8 ; 7 ; 5	7	
Vi Thái Hoà	9 ; 8 ; 10 ; 8	9 ; 7 ; 9 ; 10	9	
Phạm Hưng	4 ; 5 ; 7 ; 5	6 ; 8 ; 4 ; 7	6	
Lê Văn Kha	9 ; 10 ; 8 ; 9	8 ; 9 ; 7 ; 9	9	

Em hãy tính điểm trung bình môn Toán học kì I của 4 bạn (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) rồi ghi vào cột cuối cùng.

8. Tính giá trị (làm tròn đến hàng đơn vị) của các biểu thức sau bằng hai cách :

1) Làm tròn các số trước rồi mới thực hiện phép tính

2) Thực hiện phép tính rồi mới làm tròn kết quả

$$A = \frac{(3,92 + 1,86 - 2).5}{1,25.3,8} \; ; \; B = \frac{(5,8 + 3,1 - 6,7).30}{4,9.2,05}.$$

Hướng dẫn giải

1. 31525,7 ≈ 31526 ; 821,4 ≈ 821 ; 0,812 ≈ 1 ; 0,41 ≈ 0.

2. 84,52 ≈ 84,5 ; 15,616 ≈ 15,6 ; 1,059 ≈ 1,1 ; 8,149 ≈ 8,1.

3. Làm tròn các số đến phần trăm :

87,5469 ≈ 87,55 ; 52,5337 ≈ 52,53 ; 61,9152 ≈ 61,92; 34,0517 ≈ 34,05.

Làm tròn các số đến phần nghìn :

87,5469 ≈ 87,547 ; 52,5337 ≈ 52,534 ; 61,9152 ≈ 61,915 ; 34,0517 ≈ 34,052.

4. *Cách 1*. Làm tròn các số trước rồi mới thực hiện phép tính :
Chiều dài mảnh vườn : 13,53 m ≈ 13,5 m
Chiều rộng mảnh vườn : 7,17m ≈ 7,2 m
Diện tích mảnh vườn là : 13,5 × 7,2 ≈ 97,2 m^2
Cách 2. Tính diện tích rồi mới làm tròn
Diện tích mảnh vườn là : 13,53 × 7,17 = 97,0101 (m^2)
≈ 97 (m^2).

5. N ≈ 3,27. Đáp án C đúng.

6. Đường chéo màn hình của tivi 29 in là :
2,54 × 29 ≈ 73,66 (cm)

7. Điểm trung bình môn Toán học kì I của Ngô Văn An là :
$$\frac{(5 + 7 + 6 + 9) + (6 + 8 + 7 + 5).2 + 7.3}{15} \approx 6,7$$
HS tự tính các trường hợp khác.

8. Cách 1. A = 5 ; B = 6;
Cách 2. A = 4 ; B = 7.

§9. SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Khái niệm về căn bậc hai

• Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

• Người ta đã chứng minh được rằng số a dương có đúng hai căn bậc hai, một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$, một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$; $\sqrt{0} = 0$.

Ví dụ số 25 có hai căn bậc hai $\sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{25} = -5$.

• *Chú ý*. Không được viết $\sqrt{9} = \pm 3$;   a < 0 thì $\sqrt{a}$ không có nghĩa

2. Số vô tỉ

Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Tập hợp số vô tỉ kí hiệu là I.

Ví dụ : $\sqrt{7} = 2,64575131106...$

$\sqrt{10} = 3,16227766016...$

Người ta đã chứng minh được $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, ...$ là số vô tỉ.

II. BÀI TẬP

1. Tính $\sqrt{100}, \sqrt{\frac{1}{9}}, \sqrt{0,81}, \sqrt{0,09}$.

2. Tính giá trị biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$; b) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{15}}.\sqrt{3}$; c) $(7 + \sqrt{7}) : (\sqrt{7} + 1)$;

d) $2\left(\sqrt{252} - \sqrt{175}\right) - \left(\sqrt{112} - \sqrt{63} - \sqrt{28}\right)$.

3. Xét biểu thức $M = \sqrt{x + 7}$

a) Với giá trị nào của x thì M có nghĩa;

b) Với giá trị nào của x thì M bằng 0;

c) Với giá trị nào của x thì M là số âm.

4. Xét biểu thức $P = 2005 - \sqrt{2005 - x}$

a) Với giá trị nào của x thì biểu thức có nghĩa;

b) Với giá trị nào của x thì P lớn nhất và tính giá trị đó:

5. Với những giá trị nào của x thì cách viết sau là đúng :

a) $\sqrt{x^2} = x$; b) $\sqrt{x^2} = -x$; c) $\sqrt{x^2} = |x|$.

6. Cho biểu thức :

$$A = \sqrt{15 - x}$$

a) Với giá trị nào của x thì A có nghĩa ?

b) Với giá trị nào của x thì A = 6.

7. Cho biểu thức :

$$B = \sqrt{x - 396} + 254.$$

a) Với giá trị nào của x thì B có nghĩa ?

b) Với giá trị nào của x thì B đạt GTNN ? Tìm GTNN đó.

Hướng dẫn giải

1. $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$, $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$, $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

2. a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{8}} + \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{4}$

$= \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$.

b) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{5}}.\sqrt{3} = \sqrt{15}.\sqrt{3} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

c) $\frac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1} = \frac{(7+\sqrt{7})(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} = \frac{7\sqrt{7} - 7 + 7 - \sqrt{7}}{7-1}$

$= \frac{6\sqrt{7}}{6} = \sqrt{7}$.

d) $2\left(\sqrt{2^2.3^2.7} - \sqrt{5^2.7}\right) - \left(\sqrt{4^2.7} - \sqrt{9 \times 7} - \sqrt{4.7}\right)$

$= 12\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$.

3. $M = \sqrt{x+7}$.

a) M có nghĩa $\Leftrightarrow x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$;

b) $M = 0 \Leftrightarrow x = -7$;

c) Không có giá trị nào của x để $M < 0$ vì $M = \sqrt{x+7}$ là số không âm.

4. $P = 2005 - \sqrt{2005 - x}$

a) P có nghĩa $\Leftrightarrow 2005 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2005$;

b) Do $\sqrt{2005 - x}$ là số không âm $\forall x \leq 2005$;

$P \leq 2005$, cho nên GTLNP = 2005 $\Leftrightarrow x = 2005$.

5. a) Với $x \geq 0$ thì $\sqrt{x^2} = x$;

b) Với $x \leq 0$ thì $\sqrt{x^2} = -x$;

c) Với mọi giá trị của x thì $\sqrt{x^2} = |x|$.

6. $A = \sqrt{15 - x}$

a) A có nghĩa khi và chỉ khi $15 - x \geq 0$ hay $x \leq 15$;

b) $A = 6 \Leftrightarrow \sqrt{15 - x} = 6$. Với $x \leq 15$ thì 2 vế không âm, bình phương 2 vế ta có $15 - x = 36 \Leftrightarrow x = -21$.

7. $B = \sqrt{x - 396} + 254$

a) B có nghĩa khi và chỉ khi $x - 396 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 396$;

b) Với $x \geq 396$ thì $\sqrt{x - 396} \geq 0 \Rightarrow B = \sqrt{x - 396} + 254 \geq 254$

Vậy GTNN của B = 254 khi và chỉ khi x = 396.

§10. SỐ THỰC

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Số thực

• Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là số thực. Tập hợp số thực được kí hiệu là $\mathbb{R}$

• Với hai số thực x, y bất kì ta luôn có $x = y$ hoặc $x < y$ hoặc $x > y$.

Nếu $a \in \mathbb{R}$ thì a có thể biểu diễn dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn. Nên so sánh hai số thực tương tự như so sánh hai số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.

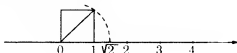
Ví dụ 0,523... < 0,555...

3,34597... > 3,34596...

• Với a, b là hai số thực dương, ta có : Nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

2. Trục số thực

• Nếu mỗi cạnh hình vuông là 1 dvd, thì độ dài đường chéo là $\sqrt{2}$ (dvd). Do vậy ta có thể biểu diễn $\sqrt{2}$ trên trục số ($\sqrt{2}$ là số vô tỉ). Người ta đã chứng minh được :



* Mỗi số thực được biểu diễn bằng một điểm trên trục số và ngược lại mỗi một điểm trên trục số đều biểu diễn một số thực.

* Các điểm biểu diễn số thực đã lấp đầy trục số vì thế trục số còn được gọi là trục số thực.

• ***Chú ý.*** Trong $\mathbb{R}$ cũng có các phép toán và tính chất như các phép toán và tính chất trong $\mathbb{Q}$.

II. BÀI TẬP

1. Thực hiện phép tính :

$$\left\{\left[(2\sqrt{2})^2 : 2,4\right].\left[5,25 : (\sqrt{7})^2\right]\right\} : \left\{\left[2\frac{1}{7} : \frac{(\sqrt{5})^2}{7}\right] : \left[2^2 : \frac{(2\sqrt{2})^2}{\sqrt{81}}\right]\right\}.$$

2. Rút gọn biểu thức sau :

$$M = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{49}} + \frac{1}{49} - \frac{1}{(7\sqrt{7})^2}}{\frac{\sqrt{64}}{2} - \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \frac{4}{343}}.$$

3. Chứng minh các đẳng thức và bất đẳng thức sau :

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = 0,8$;

b) $2^{200} = 4^{100}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$;

d) $0,(3) + 3\frac{1}{3} + 0,4(2) = 4\frac{4}{45}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} ... \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

($n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$)

4. So sánh các số thực sau :

a) $\frac{1}{\sqrt{6}} - 1$ và $-\frac{4}{5}$;

b) 2 và $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$;

c) 3^{21} và 2^{31};

d) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ và $\sqrt{11} - \sqrt{10}$.

5. Xét biểu thức :

$$A = \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} - x$$

a) Viết A dưới dạng không có dấu giá trị tuyệt đối;

b) Tìm GTNN của A.

6. Tìm cặp số thực (x ; y) thoả mãn điều kiện sau :

$$|2x - 0,(24)| + |3y + 0,1(5)| = 0$$

7. Trong các số sau đây, số nào thuộc tập hợp $\mathbb{N}$? số nào thuộc tập hợp $\mathbb{Z}$? số nào thuộc tập hợp $\mathbb{I}$? số nào thuộc tập hợp $\mathbb{Q}$? số nào thuộc tập hợp $\mathbb{R}$?

$$25 ; 0 ; -1,3 ; -20 ; \frac{3}{5} ; 0,(6) ; \sqrt{2} ; \pi ; -\sqrt{7}.$$

8. Tìm các tập hợp :

a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{I}$;   b) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$;   c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$.

9. Biểu diễn trên trục số các số sau :

$$2 ; -3 ; 0 ; -\frac{1}{2} ; \sqrt{2} ; -\sqrt{2} ; \frac{3}{5} ; 2,(3).$$

Hướng dẫn giải

1. $$\left\{\left[8 : \frac{12}{5}\right] . \left[\frac{21}{4} : 7\right]\right\} : \left\{\left[\frac{15}{7} : \frac{5}{7}\right] : \left[4 : \frac{8}{9}\right]\right\}$$

$$= \left(\frac{10}{3} . \frac{3}{4}\right) : \left(3 : \frac{9}{2}\right) = \frac{5}{2} : \frac{2}{3} = \frac{15}{4}.$$

2. $$M = \frac{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3}}{\frac{8}{2} - \frac{4}{7} + \frac{4}{7^2} - \frac{4}{7^3}} = \frac{\frac{7^3 - 7^2 + 7 - 1}{7^3}}{\frac{4.7^3 - 4.7^2 + 4.7 - 4}{7^3}}$$

$$= \frac{7^3 - 7^2 + 7 - 1}{4(7^3 - 7^2 + 7 - 1)} = \frac{1}{4}.$$

3. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{30+10+5+3}{60}=\frac{48}{60}=\frac{8}{10}=0{,}8;$

b) $2^{200}=(2^2)^{100}=4^{100}$ (đpcm);

c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2};$

d) $\frac{3}{9}+\frac{10}{3}+0{,}4+0{,}0(2)=\frac{1}{3}+\frac{10}{3}+\frac{4}{10}+\frac{1}{10}.\frac{2}{9}$

$=\frac{368}{90}=4\frac{8}{90}=4\frac{4}{45};$

e) $\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$ (1)

$\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$ (2)

...

$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ (n)

Cộng vế với vế $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>n.\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$.

4. a) Tính $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-1\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{5}=\frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}>0$

nên $\frac{1}{\sqrt{6}}-1>-\frac{4}{5};$

b) $(3\sqrt{3})^2=27>25=5^2\Rightarrow 3\sqrt{3}>5$

$(2\sqrt{2})^2=8<9=3^2\Rightarrow 2\sqrt{2}<3$

Suy ra $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}>5-3=2;$

c) $3^{21}=3^{20}.3=(3^2)^{10}.3=9^{10}.3$

$2^{31}=2^{30}.2=(2^3)^{10}.2=8^{10}.2$

Rõ ràng $9^{10}.3>8^{10}.2$. Do đó $3^{21}>2^{31}$;

d) $\sqrt{12}-\sqrt{11}=\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$, $\sqrt{11}-\sqrt{10}=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$

Rõ ràng $\sqrt{12} + \sqrt{11} > \sqrt{11} + \sqrt{10} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}} < \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{10}}$

Do đó $\sqrt{12} - \sqrt{11} < \sqrt{11} - \sqrt{10}$.

5.* Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $x - \frac{1}{2} \geq 0$, nên $\left|x - \frac{1}{2}\right| = x - \frac{1}{2}$

nên ta có : $A = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - x = \frac{1}{4}$

* Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $x - \frac{1}{2} < 0$, nên $\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - x$,

nên ta có : $A = \frac{1}{2} - x + \frac{3}{4} - x = \frac{5}{4} - 2x$

Như vậy với $x \geq \frac{1}{2}$ thì $A = \frac{1}{4}$

Với $x < \frac{1}{2}$ thì $-2x > -1 \Leftrightarrow A = \frac{5}{4} - 2x > -1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$

Do đó ta có $A \geq \frac{1}{4}$. Vậy GTNN $A = \frac{1}{4}$, khi $x = \frac{1}{2}$.

6. Tổng hai số không âm bằng 0 thì hai số đó đều bằng 0. Nên từ đẳng thức

$$|2x - 0,(24)| + |3y + 0,1(5)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 0,(24) = 0 \\ 3y + 0,1(5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{33} \\ y = \dfrac{14}{270} \end{cases}.$$

7. Các số : 25 ; 0 $\in \mathbb{N}$

Các số : 25 ; 0 ; –20 $\in \mathbb{Z}$

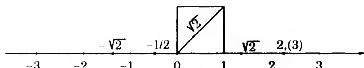
Các số : 25 ; 9 ; –1,3 ; –20 ; $\frac{3}{5}$; 0,(6) $\in \mathbb{Q}$

Các số : $\sqrt{2}$; π ; $-\sqrt{7} \in \mathbb{I}$

Tất cả các số đã cho đều thuộc tập $\mathbb{R}$.

8. a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}$; b) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

9.



ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Cho biểu thức :

$$A = \frac{x+4}{x+1}$$

a) Tìm các số nguyên x để A có giá trị là số nguyên;

b) Với giá trị nguyên nào của x thì A có giá trị là số nguyên lớn nhất ? là số nguyên nhỏ nhất ?

2. Tìm các số x, y, z, biết :

$$\frac{x-5}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-8}{26} \text{ và } 2x + 3y - z = 13.$$

3. Tìm x, biết :

a) $\dfrac{(3\sqrt{2})^2}{\sqrt{169}}.x^2 = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{225}} : \dfrac{(\sqrt{13})^2}{\sqrt{9}.\sqrt{25}}$;

b) $|x-1|.\dfrac{\sqrt{196}}{\sqrt{256}} = \dfrac{\sqrt{49}}{10.\sqrt{4}} : \dfrac{(2\sqrt{2})^2}{4.\sqrt{25}}$;

c) $(3x-7)^{2005} = (3x-7)^{2003}$.

4. Cho a, b, n $\in \mathbb{Z}$, n > 0, b > 0. Hãy so sánh hai số hữu tỉ $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{a+n}{b+n}$.

5. Chứng minh rằng: nếu $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ thì $\left(\dfrac{a-b}{c-d}\right)^4 = \dfrac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$

(Trích đề thi HSG Toán cấp II miền Bắc 1960)

6. Cho một dãy n số trong đó số đầu tiên và số cuối cùng bằng 0, còn các số khác thì mỗi số không lớn hơn trung bình cộng của hai số đứng cạnh nó. Chứng minh rằng trong dãy số đó, không có một số dương nào.

(Trích đề thi vô địch Toán Ba Lan, 1967)

7. Cho dãy các số nguyên dương $a_0, a_1, \ldots, a_{99}, a_{100}$; trong đó $a_1 > a_0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1, \ldots a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Chứng minh rằng $a_{100} > 2^{99}$

8. Tập hợp các số thực x thoả :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

là một số hữu tỉ thì tập hợp đó là tập nào trong số các tập sau:

A. Các số nguyên ; B. Các số hữu tỉ ; C. Các số thực;

D. Các giá trị x để $\sqrt{x^2 + 1}$ là số hữu tỉ;

E. Các giá trị x để $x + \sqrt{x^2 + 1}$ là số hữu tỉ.

(Đề thi vô địch Mĩ năm 1989)

Hướng dẫn giải

1. $A = \frac{x+4}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{3}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}$ $(x \neq -1)$

$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 1 \in ư(3)$; mà $ư(3) \equiv \{\pm 1 ; \pm 3\}$

Ta có bảng sau :

$x + 1$	-3	-1	1	3
x	-4	-2	0	2
$A = 1 + \frac{3}{x+1}$	0	-2	4	2

a) Vậy để $A \in \mathbb{Z}$ thì $x \in \{-4 ; -2 ; 0 ; 2\}$;

b) Với $x = 0$ thì A có giá trị nguyên lớn nhất là 4;

Với $x = -2$ thì A có giá trị nguyên nhỏ nhất là -2.

2. $\frac{x-5}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-8}{26} = \frac{2x-10}{12} = \frac{3y-9}{24} = \frac{(2x-10)+(3y-9)-(z-8)}{12+24-26}$

$= \frac{2x-10+3y-9-z+8}{10} = \frac{(2x+3y-z)+(-10-9+8)}{10} = \frac{13-11}{10} = \frac{1}{5}$

Suy ra : $\frac{x-5}{6} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5x - 25 = 6 \Leftrightarrow x = \frac{31}{5} = 6{,}2;$

$\frac{y-3}{8} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5y - 15 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{23}{5} = 4{,}6;$

$\frac{z-8}{26} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5z - 40 = 26 \Leftrightarrow z = \frac{66}{5} = 13{,}2.$

3. a) $\frac{(3\sqrt{2})^2}{\sqrt{169}}.x^2 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{225}} : \frac{(\sqrt{13})^2}{\sqrt{9}.\sqrt{25}} \Leftrightarrow \frac{18}{13}.x^2 = \frac{2}{15} : \frac{13}{3.5}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{15}.\frac{15}{13}.\frac{13}{18} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9}$. Vậy $x = \pm\frac{1}{3}$;

b) $|x-1|.\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{49}}{10.\sqrt{4}} : \frac{(2\sqrt{2})^2}{4.\sqrt{25}} \Leftrightarrow |x-1|.\frac{14}{16} = \frac{7}{10.2} : \frac{8}{4.5}$

$\Leftrightarrow |x-1| = \frac{7}{20}.\frac{20}{8}.\frac{16}{14} \Leftrightarrow |x-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

4. Xét $a(b+n) = ab + an$ (1) và $b(a+n) = ab _ bn$ (2) ($a, b, n \in \mathbb{Z}, n, b > 0$)

TH_1 : Nếu $a < b$ mà $n > 0$, nên $an < bn \Rightarrow a(b+n) < b(a+n)$

vậy $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$

TH_2 : Nếu $a > b$ mà $n > 0$, nên $an > bn \Rightarrow a(b+n) > b(a+n)$

$\Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}$

5. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \frac{(a-b)^4}{(c-d)^4}$ (1)

$\Rightarrow \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$

6. Gọi b là số dầu tiên trong dãy sao cho mọi số của dãy đứng trước b đều nhỏ hơn b và mọi số đứng sau b đều nhỏ hơn hoặc bằng b (≤ b)

Giả sử b không phải là số đầu tiên của dãy số và gọi a và c là hai số đứng cạnh b, (a đứng trước b và c đứng sau b). Theo tính chất của b ta có : $a < b, c \le b \Rightarrow a + c < 2b \Rightarrow \frac{a+c}{2} < b$. Như vậy b lớn hơn trung bình cộng của hai số đứng cạnh nó, trái với giả thiết. Do đó b phải là số đầu tiên của dãy nên b = 0. Mọi số đứng sau b đều nhỏ hơn hoặc bằng b (tức là ≤ 0). Như vậy trong dãy đó không có số dương nào.

7. Từ $a_1 > a_o$ mà a_i là số nguyên dương $\Rightarrow a_1 \ge a_o + 1$

$\Rightarrow a_1 - a_o \ge 1$

$a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_o)$

$a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1)$

...

$a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98})$

Như vậy ta có 99 đẳng thức mà hai vế đều là số dương. Nhân vế với vế của 99 đẳng thức này ta được :

$$a_{100} - a_{99} = 2^{99}(a_1 - a_o) \Rightarrow a_{100} = a_{99} + 2^{99}(a_1 - a_o) \ge 2^{99}$$

Chú ý. Ta có thể đánh giá chính xác hơn theo quy nạp $a_k \ge 2^k$

$a_{k+1} - a_k \ge 2^k$ (k = 1, 2...). Suy ra $a_{100} \ge 2^{100}$.

8. **Đáp án đúng là B.**

Ta có

$$x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = x + \sqrt{x^2+1} - \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$= x + \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2+1} = 2x$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi x là số hữu tỉ.

Chương II

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TỈ LỆ THUẬN

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (với k là số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo số tỉ lệ k

2. Tính chất Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì :

• Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi

• Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia

Ta có $y = kx \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots = k$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}, \frac{x_1}{x_5} = \frac{y_1}{y_5} \ldots$$

II. BÀI TẬP

1. Biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi $x = -15$ thì $y = 6$.
   a) Tìm hệ số tỉ lệ k của y đối với x và biểu diễn y theo x;
   b) x có tỉ lệ thuận với y không ? Tìm hệ số tỉ lệ của x đối với y.

2. Biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

x			−3,4	−0,4		$\frac{1}{2}$	40
y	25	15			$-\frac{5}{8}$		-10

3. Biết x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $-\frac{2}{3}$; y tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ 0,6 ; z tỉ lệ thuận với t theo hệ số tỉ lệ $-\frac{5}{18}$

Hỏi t có tỉ lệ thuận với x không ? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu ?

4. a) Độ dài đường tròn có tỉ lệ thuận với bán kính không ? Tìm hệ số tỉ lệ.

b) Trên mặt đồng hồ có kim giờ dài 3cm, kim phút dài 4,5 cm. Hỏi vận tốc đầu kim phút gấp mấy lần vận tốc đầu kim giờ ?

5. Hai ô tô cùng khởi hành từ A và B và đi ngược chiều nhau. Vận tốc ô tô đi từ A và vận tốc ô tô đi từ B tỉ lệ thuận với 4 và 5. Đến khi hai ô tô gặp nhau tại C thì quãng đường AC ngắn hơn quãng đường BC là 20 km. Tính quãng đường AB.

6. Chiều dài và chiều rộng một khu vườn hình chữ nhật tỉ lệ thuận với 3 và 2. Diện tích khu vườn đó là 2400 m^2. Tính chu vi của khu vườn ấy.

7. Hai đội xe vận tải chở hàng hoá. Đội 1 có 12 ô tô tải, đội 2 có 8 ô tô tải. Mỗi chuyến đội 1 chở nhiều hơn đội 2 là 20 tấn. Hỏi mỗi chuyến cả hai đội chở được bao nhiêu tấn hàng ? Biết rằng nếu chuyển 2 tấn hàng của đội 2 sang đội 1 thì số hàng hoá của mỗi ô tô phải chở trong hai đội bằng nhau.

8. Học sinh của ba lớp 6 phải trồng và chăm sóc 24 cây xanh. Lớp 6A có 32 học sinh, lớp 6B có 28 học sinh, lớp 6C có 36 học sinh. Hỏi mỗi lớp phải trồng và chăm sóc bao nhiêu cây xanh ? Biết rằng số cây xanh phải trồng và chăm sóc tỉ lệ với số học sinh.

9. Đồng bạch là một loại hợp kim Niken, kẽm và đồng với khối lượng mỗi loại tỉ lệ với 3 ; 4 và 13. Hỏi phải cần bao nhiêu kilôgam mỗi loại để sản xuất được 400 kg đồng bạch ?

10. Hai địa điểm A và B cách nhau 30 km. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A và B đi ngược chiều nhau. Ô tô thứ nhất đi từ A, ô tô thứ hai đi từ B, chúng gặp nhau lần thứ nhất tại C cách B là 12 km. Sau khi gặp nhau ô tô thứ nhất tiếp tục đi đến B rồi quay lại A. Ô tô thứ hai tiếp tục đi đến A rồi quay về B chúng gặp nhau lần thứ hai tại D. Hỏi D cách A bao nhiêu kilômét ?

Hướng dẫn giải

1. $y = kx$

a) Thay $x = -15$ và $y = 6$ ta có $6 = k.(-15) \Leftrightarrow k = \frac{-6}{15} = \frac{-2}{5}$.

Vậy $y = \frac{-2}{5}x$

b) Từ $y = \frac{-2}{5}x$, suy ra $x = \frac{-5}{2}y$. Vậy x tỉ lệ thuận với y, hệ số tỉ lệ là $\frac{-5}{2}$.

2. $y = kx$. Thay $x = 40$ và $y = -10$ ta có $-10 = k.40 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{4}$. Vậy $y = \frac{-1}{4}x$ và $x = -4y$. Từ đó tính được y khi biết x và tính được x khi biết y.

3. x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $\frac{-2}{3}$ nên $x = \frac{-2}{3}y$ (1)

y tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ 0,6 nên $y = 0,6z$ (2)

z tỉ lệ thuận với t theo hệ số tỉ lệ $\frac{-5}{18}$ nên $z = \frac{-5}{18}t$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$x = \frac{-2}{3}.y = \frac{-2}{3}.0,6z = \frac{-2}{3}.0,6.\frac{-5}{18}t = \frac{1}{9}t$. Suy ra $t = 9x$.

Vậy t tỉ lệ thuận với x, hệ số tỉ lệ là 9.

4. a) Theo công thức tính độ dài đường tròn :

$C = 2\pi R$ (C là độ dài đường tròn bán kính R)

Vậy độ dài đường tròn tỉ lệ thuận với bán kính và hệ số tỉ lệ $k = 2\pi$.

b) Sau 1 h đầu kim phút di chuyển được một quãng đường bằng độ dài đường tròn C_1 (có bán kính bằng độ dài kim phút là 4,5 cm).

Sau 1 h đầu kim giờ di chuyển được một quãng đường bằng $\frac{1}{12}$ độ dài đường tròn C_2 (có bán kính bằng độ dài kim giờ là 3cm).

Theo a) độ dài đường tròn tỉ lệ thuận với bán kính, nên ta có

$$\frac{C_1}{4,5} = \frac{C_2}{3} \Rightarrow C_1 = 1,5\,C_2$$

Gọi vận tốc của kim phút và kim giờ lần lượt là V_1, V_2 thì $V_1.1 = C_1$, $V_2.12 = C_2 \Rightarrow V_1 = 1,5.12V_2 = 18V_2$.

Vậy vận tốc kim phút bằng 18 lần vận tốc kim giờ.

5. A ——————— C ——————— B

Vận tốc ô tô đi từ A và vận tốc ô tô đi từ B tỉ lệ thuận với 4 và 5 nên $\frac{V_A}{4} = \frac{V_B}{5}$ hay $\frac{V_A}{V_B} = \frac{4}{5}$

Cùng 1 thời gian, quãng đường và vận tốc tỉ lệ thuận với nhau nên $\frac{AC}{BC} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{4}{5}$. Suy ra : $\frac{BC}{5} = \frac{AC}{4} = \frac{BC - AC}{5 - 4} = \frac{20}{1}$

Vậy :

$\frac{BC}{5} = 20 \Leftrightarrow BC = 100$ (km) ; $\frac{AC}{4} = 20 \Leftrightarrow AC = 80$ (km)

$AB = 100 + 80 = 180$ (km).

6. Gọi chiều dài là x(m) và chiều rộng là y(m) $(x, y > 0)$

Theo đề bài ta có $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \end{cases} \Rightarrow xy = 6k^2$

mà $xy = 2400$ nên :

$6k^2 = 2400 \Leftrightarrow k^2 = 400$. Vậy $k = 20$ (vì $x, y > 0$ nên $k > 0$)

Chiều dài khu vườn là $x = 3.k = 3.20 = 60$ (m), chiều rộng khu vườn là $y = 2k = 2.20 = 40$ (m), và chu vi khu vườn đó là

$$(60 + 40).2 = 200 \text{ (m)}.$$

7. Gọi khối lượng hàng hoá mỗi chuyến đội 1 chở được là x (tấn) $(x > 20)$ và khối lượng hàng hoá mỗi chuyến đội 2 chở được là y (tấn) $(y > 2)$. Nếu chuyển 2 tấn hàng của đội 2 sang đội 1 thì mỗi chuyến đội 1 chở $x + 2$ (tấn) và đội 2 chở $y - 2$ (tấn), theo đề bài ta có :

$$\frac{x+2}{12} = \frac{y-2}{8} = \frac{(x+2)-(y-2)}{12-8} = \frac{x+2-y+2}{4}$$

$$= \frac{(x-y)+4}{4} = \frac{20+4}{4} = 6. \text{ Suy ra :}$$

$\frac{x+2}{12} = 6 \Leftrightarrow x = 70$ (tấn) và $\frac{y-2}{8} = 6 \Leftrightarrow y = 50$ (tấn)

Vậy mỗi chuyến cả hai đội chở được : 70 + 50 = 120 (tấn).

8. Gọi số cây xanh phải trồng và chăm sóc của lớp 6A, 6B, 6C lần lượt là x, y, z. Vậy x, y, z phải tỉ lệ thuận với 32, 28, 26, nên ta có :

$$\frac{x}{32} = \frac{y}{28} = \frac{z}{36} = \frac{x+y+z}{32+28+36} = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$$

Vậy số cây xanh mỗi lớp phải trồng và chăm sóc là :

$$x = \frac{1}{4}.32 = 8 \text{ (cây)}$$

$$y = \frac{1}{4}.28 = 7 \text{ (cây)}$$

$$z = \frac{1}{4}.36 = 9 \text{ (cây)}.$$

9. Gọi x, y, z theo thứ tự là khối lượng của Niken, kẽm, đồng trong hợp kim đồng bạch ; x, y, z tỉ lệ thuận với 3, 4 và 13, nên ta có

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{13} = \frac{x+y+z}{3+4+13} = \frac{400}{20} = 20.$$

Vậy khối lượng mỗi loại trong 400 kg đồng bạch là :

$x = 20.3 = 60$ (kg)

$y = 20.4 = 80$ (kg)

$z = 20.13 = 260$ (kg).

10.



AB = 30 km, BC = 12 km, AC = 18 km, AD = x km, BD = (30 – x) km

Gọi khoảng cách từ D đến A là x km. Vận tốc ô tô đi từ A đến B là V_1 km/h và V_2 km/h là vận tốc của ô tô đi từ B đến A.

Từ khi khởi hành đến khi gặp nhau tại C ô tô thứ nhất (ô tô khởi hành từ A) đi được 18 km, ô tô thứ hai (ôtô khởi hành từ B) đi được 12 km nên

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ (1) (Vì cùng một thời gian thì quãng đường tỉ lệ với vận tốc)

Từ khi khởi hành đến khi gặp nhau lần thứ hai tại D, ô tô thứ nhất đi được 30 + 30 − x = 60 − x (km).

Quãng đường ô tô thứ hai đi được 30 + x (km). Ta cũng có

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{60 - x}{30 + x} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ⇒ $\frac{60 - x}{30 + x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 120 - 2x = 90 + 3x$

$$\Leftrightarrow 5x = 30 \Leftrightarrow x = 6$$

Vậy AD = 6 km.

§2. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TỈ LỆ NGHỊCH

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay xy = a (a là một hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a.

2. Tính chất

Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì :

- Tích hai giá trị tương ứng của chúng không thay đổi
- Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Nếu xy = a thì $x_1y_1 = x_2.y_2 = ... = a$

$$\frac{x_5}{x_7} = \frac{y_7}{y_5}$$

3. Áp dụng

Hai số x và y tỉ lệ nghịch với hai số a, b (a, b ≠ 0) có nghĩa là :

$x.a = y.b \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} \Leftrightarrow$ x và y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$.

Như vậy bài toán tỉ lệ nghịch với a, b đưa về bài toán tỉ lệ thuận với $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ mà ta vừa làm.

II. BÀI TẬP

1. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

x	−10		−5	2		3
y		$6\frac{2}{3}$	8		−80	

2. Tìm hai số x và y, biết x và y tỉ lệ nghịch với 6 và 9 và tổng hai số đó bằng 300.

3. Biết y tỉ lệ nghịch với x, hệ số tỉ lệ là 30 ; x tỉ lệ nghịch với z, hệ số tỉ lệ là −50.

   a) Hỏi y tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch với z ? hệ số tỉ lệ ?

   b) Tính x và z khi y = −120 ; y = 90 ; y = 1500.

4. Tìm hai số x và y biết tổng, hiệu và tích của hai số đó tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{3}$; 3 và $\frac{3}{200}$ ($x \neq 0, y \neq 0$).

5. Tìm hai số x và y biết $x^2 + y^2$; $x^2 - y^2$ và x^2y^2 tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{25}; \frac{1}{7}$ và $\frac{1}{576}$ ($x \neq 0, y \neq 0$).

6. Học sinh lớp 7A chở vật liệu để sửa lớp học. Nếu mỗi chuyến xe bò chở 4,5 tạ thì phải đi 20 chuyến, nếu mỗi chuyến chở 6 tạ thì phải đi bao nhiêu chuyến ? Số vật liệu cần chở là bao nhiêu ?

7. Một công nhân theo kế hoạch phải tiện xong 120 dụng cụ. Nhờ cải tiến kĩ thuật, đáng lẽ tiện xong một dụng cụ phải mất 20 phút thì người đó chỉ làm trong 8 phút. Hỏi thời gian trước đây đã quy định thì người đó sẽ tiện được bao nhiêu dụng cụ. Như vậy vượt mức bao nhiêu phần trăm ?

8. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng và chiều cao tỉ lệ nghịch với 2 ; 3 và 5, thể tích của bể là 0,9 m^3. Hãy tính chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể ấy.

9. Một ô tô tải và một ô tô con cùng khởi hành từ A đi về phía B. Vận tốc ô tô con là 60 km/h, vận tốc ô tô tải là 50 km/h. Khi ô tô tải đến B thì ô tô con đã đến B trước 24 phút. Tính quãng đường AB.

10. Ba ô tô đi từ A về phía B. Vận tốc ô tô thứ 1 kém vận tốc ô tô thứ 2 là 4 km/h. Thời gian ô tô thứ 1, ô tô thứ 2 và ô tô thứ 3 đi hết quãng đường AB lần lượt là 5giờ 24 phút ; 5 giờ và 4 giờ 30 phút.
Tính vận tốc của mỗi ô tô và quãng đường AB.

Hướng dẫn giải

1. x và y là 2 đại lượng tỉ lệ nghịch nên xy = a. Thay x = −5 và y = 8 ta có −5.8 = a hay a = −40. Vậy $y = \frac{-40}{x}$ và $x = \frac{-40}{y}$. Từ đó tính được y khi biết x và tính được x khi biết y.

2. Vì x và y tỉ lệ nghịch với 6 và 9 nên 6x = 9y, suy ra :

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{1}{9}} = \frac{x+y}{\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{300}{\frac{5}{18}} = 1080.\text{ Vậy } \begin{cases} x = 1080.\frac{1}{6} = 180 \\ y = 1080.\frac{1}{9} = 120 \end{cases}$$

3. a) y tỉ lệ nghịch với x, hệ số tỉ lệ là 30 nên $y = \frac{30}{x}$ (1) x tỉ lệ nghịch với z, hệ số tỉ lệ là −50 nên $x = \frac{-50}{z}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra : $y = \frac{30}{\frac{-50}{z}} = \frac{-3}{5}z$. Vậy $y = \frac{-3}{5}z$, do đó y tỉ lệ thuận với z, hệ số $\frac{-3}{5}$;

b)

y	−120	90	1500
$x = \frac{30}{y}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{50}$
$z = -\frac{5}{3}y$	200	−150	−2500

4. Theo đề bài ta có :

$$\frac{1}{3}(x+y) = 3(x-y) = \frac{3}{200}xy \Leftrightarrow \frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+x-y}{3+\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} \Rightarrow \frac{2x}{3+\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{5}{3}} = k$$

$\Rightarrow x = \frac{5k}{3}$ thay vào (*) ta có :

$$\frac{x+y}{3} = k \text{ hay } \frac{\frac{5k}{3}+y}{3} = k \Leftrightarrow y = \frac{4k}{3}$$

Do đó $xy = \frac{5k}{3}.\frac{4k}{3} = \frac{20k^2}{9}$ (1)

$$\frac{xy}{\frac{200}{3}} = k \Leftrightarrow xy = \frac{200k}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{20k^2}{9} = \frac{200k}{3} \Leftrightarrow k^2 = 30k$

$k \neq 0 \Rightarrow k = 30$

$\Rightarrow x = 50, y = 40.$

5. Tương tự 4. Ta có : $\frac{x^2+y^2}{25} = \frac{x^2-y^2}{7} = \frac{x^2y^2}{576}$

$$\frac{x^2y^2}{576} = \frac{x^2+y^2}{25} = \frac{x^2-y^2}{7} = \frac{2x^2}{32} = \frac{x^2}{16}$$

Vậy $y^2 = \frac{x^2}{16} : \frac{x^2}{576} = 36 \Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow x = \pm 8$

Ta có 4 cặp số (x ; y) thoả mãn đề bài :

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 8 \\ y = -6 \end{cases}, \begin{cases} x = -8 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = -8 \\ y = -6 \end{cases}$$

6. Khối lượng vật liệu chuyên chở không đổi thì khối lượng mỗi chuyến xe bò phải chở và số chuyến là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Mỗi chuyến xe chở	số chuyến
4,5 tạ	20
6 tạ	x ?

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta có :

$$\frac{4,5}{6} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{4,5.20}{6} = 15 \text{ (chuyến)};$$

Số vật liệu cần chở là 90 tạ.

7. Trong cùng một đơn vị thời gian thì số lượng thời gian tiện một dụng cụ và số lượng dụng cụ tiện được là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Thời gian tiện một dụng cụ	Số dụng cụ tiện được
20 phút	120
8 phút	x ?

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta có :

$$\frac{20}{8} = \frac{x}{120} \Rightarrow x = \frac{120.20}{8} = 300 \text{ (dụng cụ)}$$

Như vậy vượt mức : $\frac{300 - 120}{120}.100\% = 150\%$

8. Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của bể là x, y, z (m) (x, y, z > 0). Vì x, y, z tỉ lệ nghịch với 2 ; 3 và 5 nên ta có 2x = 3y = 5z, suy ra

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = k$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}k \ ; \ y = \frac{1}{3}k \text{ và } z = \frac{1}{5}k$$

$$\Rightarrow xyz = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{5}k^3 = 0,9 \Leftrightarrow k^3 = 27 \Leftrightarrow k = 3$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} x = \frac{1}{2}.3 = 1,5 \text{ (m)} \\ y = \frac{1}{3}.3 = 1 \text{ (m)} \\ z = \frac{1}{5}.3 = 0,6 \text{ (m)} \end{cases}$$

9. Gọi x và y là thời gian (đơn vị là giờ) của ô tô con và ô tô tải đi từ A đến B. Cùng 1 quãng đường thì vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên ta có 60x = 50y,

suy ra $\dfrac{x}{\frac{1}{60}} = \dfrac{y}{\frac{1}{50}} = \dfrac{y-x}{\frac{1}{50}-\frac{1}{60}} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{300}} = 120$

(24 phút = $\frac{2}{5}$ giờ)

Vậy $\dfrac{x}{\frac{1}{60}} = 120 \Leftrightarrow x = 2$ (giờ). Quãng đường AB dài 2.60 = 120 km.

10. 5 giờ 24 phút = $5\frac{2}{5} = \frac{27}{5}$ (giờ) ; 4giờ 30 phút = $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ (giờ)

Gọi vận tốc ô tô thứ 1, thứ 2, thứ 3 theo thứ tự là x, y, z (km/h). Cùng 1 quãng đường thì vận tốc và thời gian là 2 đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có :

$$x.\frac{27}{5} = y.5 = z.\frac{9}{2} \text{ hay } \frac{x}{\frac{5}{27}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{2}{9}} = \frac{y-x}{\frac{1}{5}-\frac{5}{27}} = \frac{4}{\frac{2}{135}} = 270.$$

Suy ra : $\dfrac{x}{\frac{5}{27}} = 270 \Leftrightarrow x = 50$ (km/h)

$\dfrac{y}{\frac{1}{5}} = 270 \Leftrightarrow y = 54$ (km/h) và $\dfrac{z}{\frac{2}{9}} = 270 \Leftrightarrow z = 60$ (km/h)

Quãng đường AB dài : $50 \times \frac{27}{5} = 270$ (km).

§3. HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Khái niệm hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì *y được gọi là hàm số của x* và x *gọi là biến số*.

2. Chú ý

• Hàm số có thể cho bằng bảng, bằng công thức. Khi hàm số cho bằng công thức thì biến số chỉ nhận những giá trị làm cho công thức có nghĩa. Tập hợp những giá trị đó gọi là tập xác định của hàm số.

• Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.

• Khi y là hàm số của x thường được kí hiệu y = f(x), y = g(x)...

Chẳng hạn hàm số y = f(x) = 5x − 1 và khi x = 1 thì giá trị tương ứng của y là y = f(1) = 5.1 − 1 = 4.

Ví dụ : Cho hàm số $y = f(x) = \frac{5 - x}{2 + x}$

Hàm số được xác định $\forall x \neq -2$ (TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$)

Với $x = 0 \Rightarrow y = \frac{5 - 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$ ta viết $f(0) = \frac{5}{2}$.

II. BÀI TẬP

1. Sự liên hệ giữa đại lượng y và đại lượng x được biểu thị bằng công thức sau :

a) y = f(x) = 3x − 18 ; b) y = f(x) = 2;

c) $|y| = x$; d) $y = |x|$.

Trong trường hợp nào y là hàm số của x ? Vì sao ?

Trường hợp nào y không phải là hàm số của x ? Vì sao ?

2. Cho hàm số $y = x^2 - 10$

a) Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

x	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	1,5	$\sqrt{7}$	6
y							

b) Tìm x để y = 111 ; y = 90 ; y = 279;

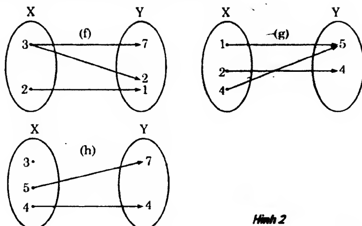
c) Có hay không giá trị của x để y < −10 ?

3. Cho hàm số $y = \frac{a}{x - 1}$

a) Với những giá trị nào của x thì tính được y ?

b) Tính a biết khi x = 6 thì y = –20.

c) Với giá trị của a tìm được ở câu b) thì khẳng định nào sau đây là đúng : y(–49) = 2 ; y(20) = –5 ; y(25) = 4 ?

4. 

Hình 2

Trong các tương ứng trên (h.2), tương ứng nào cho một hàm số.

5. Cho hàm số f được xác định như sau : Cho ứng với số tự nhiên có hai chữ số với tổng các chữ số của nó.

a) Tìm tập xác định của hàm số

b) Tính f(5), f(12), f(99), f(71)

c) Tìm x biết f(x) = 5

6. Cho hàm số y = f(x) xác định $\forall x \in Q$ thoả mãn :

a) f(0) = 0;

b) $\dfrac{f(x_1)}{x_1} = \dfrac{f(x_2)}{x_2}$ với $x_1, x_2 \neq 0$ bất kì.

Chứng minh rằng: f(x) = kx (k là một hằng số)

7. Cho hàm số y = |x – 1|

a) Tính f(–2), f(–5), f(1), f(0,5);

b) Nếu bỏ dấu giá trị tuyệt đối thì hàm số y viết theo công thức nào ?

c) Tìm x biết f(x) = 5.

Hướng dẫn giải

1. a) $y = f(x) = 3x - 18$. Với mỗi giá trị của $x \in \mathbb{R}$ ta tính được một giá trị duy nhất của y. Vậy y là hàm số của biến số x.

b) $y = f(x) = 2$. Với mỗi giá trị của $x \in \mathbb{R}$ ta có 1 giá trị tương ứng duy nhất của y là 2. Vậy y là hàm số của x.

c) $|y| = x$. Với mỗi giá trị dương của x, ta có hai giá trị khác nhau của y (ví dụ : với $x = 5$ thì $y = \pm 5$) nên y không phải là hàm số của x.

d) $y = |x|$. Với mỗi giá trị của $x \in \mathbb{R}$ ta có 1 giá trị tương ứng duy nhất của y (ví dụ : với $x = -3$ thì $y = 3$) nên y là hàm số của x.

2. a) hs tự làm;

b) $y = x^2 - 10$ mà $y = 111$ nên $x^2 - 10 = 111 \Leftrightarrow x^2 = 121 \Leftrightarrow x = \pm 11$;

* $y = 90$ thì $x = \pm 10$;
* $y = 279$ thì $x = \pm \sqrt{289}$;

c) $y = x^2 - 10$ mà $y < -10$ nên $x^2 - 10 < -10 \Leftrightarrow x^2 < 0$; không có x.

3. $$y = \frac{a}{x - 1}$$

a) Với $x - 1 \neq 0$ hay $x \neq 1$ thì tính được y;

b) Thay $x = 6$ và $y = -20$ ta có : $-20 = \frac{a}{6 - 1} \Leftrightarrow a = -100$

vậy : $y = \frac{-100}{x - 1}$;

c) $y(-49) = 2$ là đúng vì $y = \frac{-100}{x - 1} = \frac{-100}{-49 - 1} = \frac{-100}{-50} = 2$.

4. f không phải là hàm số từ X đến Y vì ứng với $3 \in X$ có đến hai số 7 ; $2 \in Y$
g là hàm số từ X đến Y (theo định nghĩa hàm số)
h không phải là hàm số từ X đến Y vì với $3 \in X$ không có giá trị tương ứng nào thuộc Y.

5. a) Chỉ có những số có hai chữ số ta mới tìm được f. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \{10, 11, 12 ... 98, 99\}$

b) $5 \notin D$ nên không tìm được f(5), $f(12) = 3$, $f(99) = 18$, $f(71) = 8$.

c) $f(x) = 5$ thì $x = 14 ; 41 ; 23 ; 32; 50$.

6. Với x = 1, ta có f(1) được xác định ta đặt f(1) = k (k là hằng số)

Với x = 0, ta có f(0) = 0 = k.0 (giả thiết a)

Với $x \neq 0$, lấy $x_1 = x$, $x_2 = 1$, theo giả thiết b) ta có

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{k}{1} \Rightarrow f(x) = kx$$

Vậy $f(x) = kx \ \forall x \in \mathbb{Q}$

7. a) $f(-2) = |-2 - 1| = 3$, $f(-5) = 6$, $f(1) = 0$, $f(0{,}5) = 0{,}5$

b) $y = f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ với } x \geq 1 \\ 1 - x \text{ với } x < 1. \end{cases}$

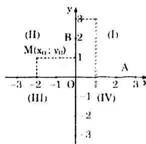
c) $|x - 1| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6 \\ x - 1 = -5 \Rightarrow x = -4 \end{array}\right.$

§4. MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Mặt phẳng toạ độ

Trên mặt phẳng vẽ hai trục số Ox, Oy vuông góc với nhau tại gốc mỗi trục số (O) (h.3). Khi đó ta có hệ trục toạ độ Oxy. Các trục Ox, Oy gọi là các trục toạ độ.



Hình 3

Trục Ox (nằm ngang) gọi là trục hoành.

Trục Oy (thẳng đứng) gọi là trục tung, O gọi là gốc tọa độ.

Hai trục toạ độ chia mặt phẳng toạ độ thành 4 góc I, II, III, IV (h.3)

Gốc O được biểu diễn số 0, các đơn vị dài trên hai trục toạ độ được chọn bằng nhau (nếu không nói gì thêm).

2. Toạ độ của một điểm trong mặt phẳng toạ độ

Cho điểm I bất kì nằm trong mặt phẳng toạ độ. Từ I kẻ các đường vuông góc với hai trục tọa độ. Giả sử các đường vuông góc này cắt trục hoành tại điểm 1 và trục tung tại điểm 3. Khi đó cặp số (1 ; 3) gọi

là toạ độ của điểm I và kí hiệu là I(1 ; 3). 1 gọi là hoành độ, 3 gọi là tung độ của điểm I.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

* Mỗi điểm M xác định một cặp số (x_0, y_0)

* Ngược lại mỗi cặp số $(x_0 ; y_0)$ xác định một điểm M.

Chú ý

* Những điểm nằm trên trục hoành có tung độ bằng 0, như điểm A (2 ; 0) trên h,

* Những điểm nằm trên trục tung có hoành độ bằng 0, như điểm B(0 ; 2).

* Gốc O (0 ; 0).

* Viết toạ độ của một điểm *hoành độ viết trước, tung độ viết sau.*

II. BÀI TẬP

1. Vẽ một hệ trục toạ độ Oxy và đánh dấu các điểm A(1 ; 4) và B(5 ; 1).

a) Tính khoảng cách AB;

b) Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

2. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy xác định tất cả các điểm :

a) có hoành độ bằng −2 ;

b) có hoành độ bằng 0 ;

c) có tung độ bằng 3 ;

d) có tung độ bằng 0.

3. Cho hàm số y của x :

x	−2	−1	0	3	4	5
y	1	$\frac{1}{2}$	0	−1,5	−2	−2,5

a) Viết tất cả các cặp giá trị tương ứng (x ; y) của hàm số trên;

b) Vẽ một hệ trục toạ độ Oxy và xác định các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng của x và y ở câu a).

4. a) Xác định các điểm sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ A(1 ; 0), B(1 ; 4), C(5 ; 4), D(7 ; 0);

b) Tứ giác ABCD là hình gì ?

c) Tìm toạ độ các điểm M, N, P, Q theo thứ tự là tung điểm các cạnh AB, BC, CD, AD;

d) Tìm chu vi và diện tích tứ giác ABCD.

5. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm các điểm biểu diễn các cặp số (x ; y) thoả mãn $\begin{cases}|x| = 2\\|y| = 1\end{cases}$

Hướng dẫn giải

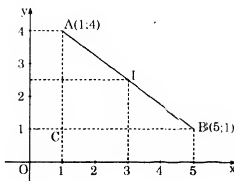
1. a) Khoảng cách $AC = |y_A - y_C| = |4 - 1| = 3$.

Khoảng cách $BC = |x_B - x_C| = |5 - 1| = 4$.

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông CAB ($\widehat{C} = 90^0$) ta được :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Vậy AB = 5.



Hình 4

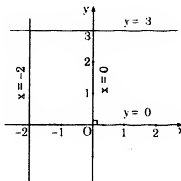
b) Toạ độ của I $\begin{cases}x = 3\\y = 2,5\end{cases}$

2. (h.5)

a) Tất cả các điểm có hoành độ bằng (−2) nằm trên đường thẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng (−2).

b) Tất cả các điểm có hoành độ bằng 0 nằm trên trục tung.

c) Tất cả các điểm có tung độ bằng 3 nằm trên đường thẳng vuông góc với trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.



Hình 5

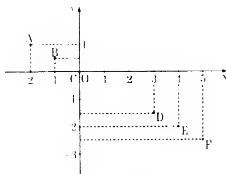
d) Tất cả các điểm có tung độ bằng 0 thì nằm trên trục hoành

3. a) A(−2 ; 1) ; $B\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

C(0 ; 0) ; D(3 ; −1,5)

E(4 ; −2) ; F(5 ; −2,5)

b) hình vẽ 6



Hình 6

4. a) (h.7)

b) Tứ giác **ABCD** là hình thang vuông có BC // AD và $\widehat{A}$ = 1v

c) Toạ độ M(1 ; 2), N(3 ; 4), P(6 ; 2), Q(4 ; 0) (xem bài 1)

d) Làm tương tự như bài 1a) ta có :

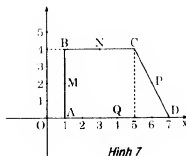
AB = 4, BC = 4, CD = $4\sqrt{2}$, AD = 6

Vậy chu vi hình thang ABCD :

$4 + 4 + 4\sqrt{2} + 6 = 14 + 4\sqrt{2}$ (dvd)

Diện tích hình thang ABCD là

$S = \frac{AD + BC}{2}.AB \Rightarrow S = \frac{6 + 4}{2}.4 = 20$ (dvdt)



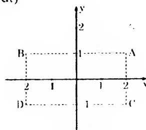
Hình 7

5. (h.8) $\begin{cases}|x| = 2\\|y| = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \pm 2\\y = \pm 1\end{cases}$

Như vậy có 4 điểm

A(2 ; 1), B(−2 ; 1)

C(2 ; −1), D(−2 ; −1)



Hình 8

§5. ĐỒ THỊ HÀM SỐ Y = AX (A ≠ 0)

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x ; y)$ trên cùng mặt phẳng toạ độ.

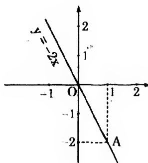
2. Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

3. Nhận xét : Đồ thị hàm số $y = ax$ là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ, nên khi vẽ ta chỉ cần xác định một điểm khác điểm gốc O và thuộc đồ thị. Điểm thứ hai thường là $x = 1$, $y = a$

Ví dụ : Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x$

Với $x = 1 \Rightarrow y = -2$, ta có điểm $A(1 ; -2)$; đồ thị ở Hình 9.

II. BÀI TẬP



Hình 9

1. Cho hàm số $y = \frac{-2}{3}x$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm trên đồ thị những điểm có hoành độ x mà $-1 \leq x \leq 1$.

c) Tìm trên đồ thị những điểm có tung độ y mà $-2 \leq y \leq -1$.

2. Cho hai hàm số $y = 4x$ và $y = -\frac{1}{4}x$

a) Vẽ trên cùng 1 hệ trục toạ độ, đồ thị hai hàm số đó;

b) Chứng minh hai đồ thị vuông góc với nhau.

3. Trên mặt phẳng toạ độ :

a) Tìm tất cả những điểm có hoành độ và tung độ bằng nhau;

b) Tìm tất cả những điểm có hoành độ và tung độ là hai số đối nhau.

4. Vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$.

5. Vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$ với $-2 \leq x \leq 2$.

6. Xét hàm số $y = ax$

a) Xác định a biết đồ thị hàm số đi qua điểm M(1.2);

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ với a vừa tìm được;

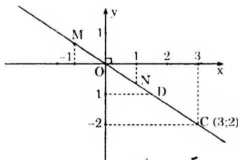
c) Trong các điểm A'(2 ; 4), B(−3 ; 1), C(−2 ; −4) điểm nào thuộc đồ thị...

Hướng dẫn giải

1. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-2}{3}x$.

x	0	3
$y = \frac{-2}{3}x$	0	−2

Đồ thị hàm số $y = \frac{-2}{3}x$ là đường thẳng OC.



Hình 10

b) Kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ là (−1) và 1 cắt đồ thị tại M và N thì tất cả những điểm thuộc đoạn thẳng MN có hoành độ x mà $-1 \le x \le 1$.

c) Kẻ các đường thẳng vuông góc với trục tung tại điểm có tung độ (−2) và (−1) cắt đồ thị tại C và D thì tất cả những điểm thuộc đoạn thẳng CD có tung độ y mà $-2 \le y \le -1$.

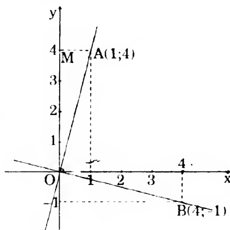
2. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 4x$

x	0	1
$y = 4x$	0	4

Đồ thị hàm số $y = 4x$ là đường thẳng OA

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{4}x$

x	0	4
$y = \frac{-1}{4}x$	0	−1

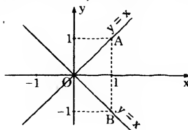


Hình 11

Đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{4}x$ là đường thẳng OB.

b) $\Delta OMA = \Delta ONB$ (vì $OM = ON = 4$; $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^o$, $AM = NB = 1$)

$\Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{NOB}$ mà $\widehat{MOA} + \widehat{AON} = 90^o$ nên $\widehat{NOB} + \widehat{AON} = 90^o$ hay $\widehat{AOB} = 90^o$. Vậy $OA \perp OB$.



Hình 12

3. (h.12) a) Tất cả những điểm có hoành độ và tung độ bằng nhau thuộc đồ thị hàm số y = x

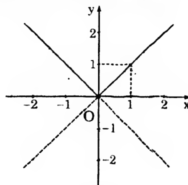
x	0	1
y = x	0	1

Tất cả các điểm phải tìm ∈ đường thẳng OA.

b) Tất cả những điểm có hoành độ và tung độ là hai số đối nhau thuộc đồ thị hàm số y = −x

x	0	1
y = −x	0	−1

Tất cả các điểm phải tìm thuộc đường thẳng OB.



Hình 13

4. $y = |x|$ hay $y = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

Trước hết ta vẽ đồ thị hàm số y = x và lấy phần đồ thị ứng với $x \geq 0$, sau đó vẽ đồ thị hàm số y = −x ứng với x < 0. Đồ thị là phần nét liền của hình 13.

5. $y = f(x) = [x]$; $x \in [-2 ; 2]$.

Với $-2 \leq x < -1$ thì $y = -2$

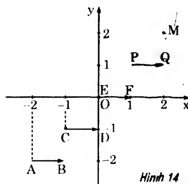
Với $-1 \leq x < 0$ thì $y = -1$

Với $0 \leq x < 1$ thì $y = 0$

Với $1 \leq x \leq 2$ thì $y = 1$

Với $x = 2$ thì $y = 2$

Đồ thị gồm các nửa đoạn thẳng [AB), [CD), [EF), [PQ) và điểm M



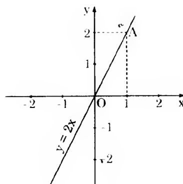
Hình 14

6. a) Đồ thị hàm số y = ax đi qua điểm M(1 ; 2) ⇔ 2 = a.1 ⇔ a = 2.

Vậy ta có hàm số y = 2x

b) Hàm số y = 2x. Cho x = 1 ⇒ y = 2. Có điểm thứ hai A(1 ; 2). Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số y = 2x (h.15)

c) Điểm A'(2 ; 4), C(−2 ; −4) thuộc đồ thị hàm số y = 2x vì toạ độ của nó thoả mãn phương trình y = 2x



Hình 15

Bài đọc thêm

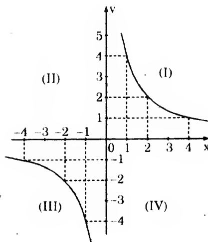
ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = \frac{a}{x}$ (a ≠ 0)

1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x}$

Lập bảng giá trị tương ứng giữa y và x

x	−4	−2	−1	0	1	2	4
y	−1	−2	−4	‖	4	2	1

Vẽ các điểm biểu diễn các cặp số trên, ta được hình 16



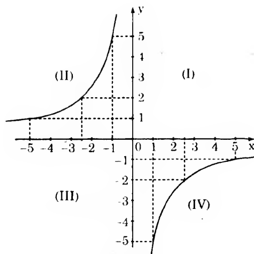
Hình 16

2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-5}{x}$

Lập bảng giá trị tương ứng giữa y và x

x	−5	−2,5	−1	0	1	2,5	5
y	1	2	5	‖	−5	−2	−1

Đồ thị là hình 17



Hình 17

3. Nhận xét

Từ hai đồ thị trên ta thấy đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ là đường cong gồm hai nhánh.

- Nếu $a > 0$ hai nhánh nằm ở góc phần tư thứ nhất và góc phần tư thứ ba.
- Nếu $a < 0$ hai nhánh nằm ở góc phần tư thứ hai và thứ tư.

Đường cong này gọi là hyperbol

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Điền các giá trị thích hợp của x và y vào ô trống để được :

a) Hai đại lượng tỉ lệ thuận

x	3,5		11		15,2
y	4,2	12,6		15,6	

b) Hai đại lượng tỉ lệ nghịch

x	2		3		5
y		0,6		0,375	0,3

2. Hiện nay anh hơn em 8 tuổi. Tuổi của anh cách đây 5 năm và tuổi em sau 8 năm nữa tỉ lệ với 3, 4. Hỏi tuổi của hai anh em ?

3. Tam giác ABC có diện tích không đổi. Hỏi độ dài của một cạnh và đường cao tương ứng với cạnh đó là hai đại lượng tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch ?
Biết chu vi của tam giác ABC là 26m, các đường cao của tam giác có chiều dài là 2m, 3m, 4m. Tìm độ dài mỗi cạnh của tam giác ABC.

4. Đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x, hệ số tỉ lệ a ($a \neq 0$). Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z, hệ số tỉ lệ b ($b \neq 0$).
Hỏi đại lượng z tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch với đại lượng y ? hệ số tỉ lệ?

5. Ba tổ công nhân A, B, C phải sản xuất cùng một số sản phẩm như nhau. Thời gian 3 tổ hoàn thành kế hoạch theo thứ tự là 14 ngày, 15 ngày và 21 ngày. Tổ 1 nhiều hơn tổ 3 là 10 người. Hỏi mỗi tổ có bao nhiêu công nhân ? (năng suất lao động của các công nhân như nhau)

6. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, đánh dấu hai điểm A(−4 ; −3) và $B\left(2; \frac{3}{2}\right)$
Gốc toạ độ O và hai điểm A và B có là 3 điểm thẳng hàng không ? Vì sao ?

7. Cho hàm số (hàm dấu) y = Sgnx xác định trên tập $\mathbb{Q}^*$ và

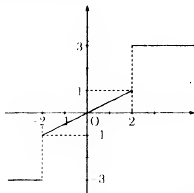
$$y = \text{Sgn}x = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x > 0 \\ -1 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

($\mathbb{Q}^*$ là tập hợp các số hữu tỉ khác 0 ; Sgn là chữ viết tắt của signum (xíc−num), có nghĩa là dấu, Sgnx đọc là xic numx

a) Tính $\text{Sgn}x^2$ ($x \neq 0$), $\text{Sgn}(-1)^{2k}$, $\text{Sgn}(-1)^{2k+1}$, $k \in N$

b) Vẽ đồ thị hàm y= Sgnx

8. a) Trên đồ thị ở hình 18 có biểu thị mối quan hệ hàm số không ? Vì sao ?
b) Tìm hàm số có đồ thị là hình 18.



Hình 18

Hướng dẫn giải

1. a) Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = ... = a$

Cho nên a = 4,2 : 3,5 = 1,2 và y = 1,2x. Từ đó ta có bảng sau

x	3.5	**10,5**	11	**13**	15,2
y	4,2	12,6	**13,2**	15,6	**18,24**

b) Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch $y_1x_1 = y_2x_2 = a$

Vậy a = 5.03 = 1,5 và $y = \frac{1,5}{x}$. Từ đó ta có bảng sau.

x	2	**2,5**	3	**4**	5
y	**0,75**	0,6	**0,5**	0,375	0,3

2. Gọi tuổi của anh và em hiện nay lần lượt là x, y (x, y là nguyên dương) thì $\frac{x-5}{3} = \frac{y+8}{4} = \frac{x-y-5-8}{3-4} = \frac{8-5-8}{-1} = 5$

Vậy tuổi của anh là : x – 5 = 15 ⇒ x = 20

Tuổi của em là y + 8 = 20 ⇒ y = 12.

3. Gọi độ dài cạnh BC của ΔABC là a và chiều cao tương tự là h_a. Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a$ nếu S_{ABC} không đổi thì a và h_a là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác ABC là a, b, c ứng với độ dài của ba đường cao lần lượt là : 2m, 3m, 4m (Điều này không làm mất tổng quát của bài toán)

Như vậy a, b, c tỉ lệ nghịch với 2, 3, 4, nên a, b, c, tỉ lệ thuận $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

Do đó ta có

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{4}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{26}{\frac{13}{12}} = 24$$

Vậy độ dài ba cạnh của ΔABC

$$a = 24.\frac{1}{2} = 12\ (m)$$

$$b = 24.\frac{1}{3} = 8\ (m)$$

$$c = 24.\frac{1}{4} = 6\ (m).$$

4. y tỉ lệ nghịch với x, hệ số tỉ lệ a nên x cũng tỉ lệ nghịch với y, hệ số tỉ lệ a, do đó $x = \frac{a}{y}$ (1) ($a \neq 0$)

x tỉ lệ nghịch với z, hệ số tỉ lệ b nên z cũng tỉ lệ nghịch với x, hệ số tỉ lệ b, do đó $z = \frac{b}{x}$ (2) ($b \neq 0$)

Từ (1) và (2) suy ra $z = \frac{b}{\frac{a}{y}} = \frac{b}{a}y$. Vậy $z = \frac{b}{a}y$, suy ra z tỉ lệ thuận với y hệ số tỉ lệ $\frac{b}{a}$.

5. Năng suất lao động của các công nhân như nhau, khối lượng công việc bằng nhau, thì số công nhân và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi số công nhân của các tổ A, B, C là x, y, z thì ta có $14x = 15y = 21z \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{14}} = \frac{y}{\frac{1}{15}} = \frac{z}{\frac{1}{21}} = \frac{x - y}{\frac{1}{14} - \frac{1}{15}} = \frac{10}{\frac{1}{210}} = 2100$. Suy ra :

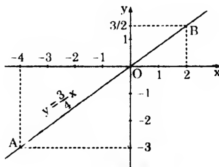
$\frac{x}{\frac{1}{14}} = 2100 \Leftrightarrow x = 150$ (người) ; $\frac{y}{\frac{1}{15}} = 2100 \Leftrightarrow y = 140$ (người)

$\frac{z}{\frac{1}{21}} = 2100 \Leftrightarrow z = 100$ (người).

6. Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số

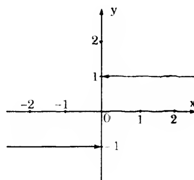
y = ax (1)

Thay x = –4 và y = –3 vào (1) ta có $-3 = a.(-4) \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$ vậy đường thẳng OA là đồ thị của hàm số :



Hình 19

$y = \frac{3}{4}x$. Thay $x = 2$ và $y = \frac{3}{2}$ ta có $\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.2 = \frac{3}{2}$. Tọa độ của điểm B thoả mãn $y = \frac{3}{4}x$ nên B thuộc đường thẳng OA. Vậy ba điểm A, O, B thẳng hàng.



Hình 20

7. a) Do $x^2 > 0$ (do $x \neq 0$) nên $Sgnx^2 = 1$.

   Tương tự $Sgn(-1)^{2k} = 1$ và $Sgn(-1)^{2k+1} = -1$.

   b) Đồ thị hàm số y = Sgnx (h.20)

8. Trên đoạn [–2, 2] đồ thị là đường thẳng đi qua gốc toạ độ (h.18) nên hàm số của nó là y = ax đồ thị lại đi qua điểm (2 ; 1), nên ta có :

$$1 = a.2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

với x > 2 đồ thị là đường thẳng song song với trục hoành cắt trục tung tại điểm có tung độ là 3, nó chính là đồ thị của hàm y = 3.

Tương tự với $x < -2 \Rightarrow y = -3$.

Vậy hàm số có đồ thị (h.18) là $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{với } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{với } x > 2 \\ -3 & \text{với } x < -2 \end{cases}$

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

§1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

2. Tính chất

Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

3. Chú ý

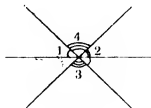
Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành hai cặp góc đối đỉnh.

II. BÀI TẬP

1. Ba đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành bao nhiêu cặp góc đối đỉnh.

2. Trên hình 22. Tính $\hat{1} + \hat{2}$?

3. Trên hình 21 tính tổng $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$.

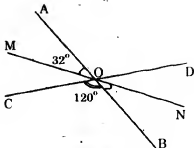


Hình 21

4. Trên hình 23 cho $\widehat{MOA} = 32^o$, $\widehat{BOC} = 120^o$. Tính các góc $\widehat{MOD}$, $\widehat{AON}$, $\widehat{DOB}$, $\widehat{DON}$.



Hình 22



Hình 23

5. a) Vẽ góc AMC = 75^{o}.

   b) Vẽ góc AMD kề bù $\widehat{AMC}$ và vẽ góc CMB kề bù $\widehat{AMC}$.

   c) Kể tên các cặp góc đối đỉnh (khác góc bẹt).

   d) Tính số đo các góc có đỉnh M (khác góc bẹt).

6. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau ở điểm O sao cho $\widehat{AOC} = 70^{o}$. Kẻ tia phân giác OE của $\widehat{AOC}$ và kẻ tia OF là tia đối của tia OE.

   a) Tính số đo góc $\widehat{AOD}$.

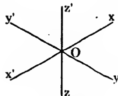
   b) Chứng minh tia OF là tia phân giác của $\widehat{BOD}$.

7. Hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau ở O và tia Oy là tia phân giác của góc xOx'. Chứng minh các góc có đỉnh O (khác góc bẹt) bằng nhau.

8. Góc của hai đường thẳng hk bằng 60^{o}, góc của hai đường thẳng mh bằng 30^{o}. Hãy tìm góc của hai đường thẳng km. Biết rằng ba đường thẳng m, h, k cùng cắt nhau tại một điểm.

Hướng dẫn

1. Có 6 cặp góc đối đỉnh được tạo thành $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'Oy'}$; $\widehat{xOz}$ và $\widehat{x'Oz'}$; $\widehat{yOz}$ và $\widehat{y'Oz'}$; $\widehat{yOx'}$ và $\widehat{y'Ox}$; $\widehat{zOx'}$ và $\widehat{z'Ox}$; $\widehat{zOy'}$ và $\widehat{z'Oy}$ và 3 cặp góc đối đỉnh đặc biệt $\widehat{xOx'}$ và $\widehat{x'Ox}$; $\widehat{yOy'}$ và $\widehat{y'Oy}$; $\widehat{zOz'}$ và $\widehat{z'Oz}$



Hình 24

2. Trên hình 22: $\hat{1} = \hat{2}$ (hai góc đối đỉnh) $\hat{1} = 180^{0} - 150^{0} = 30^{0}$. Vậy $\hat{1} + \hat{2} = 30^{0} + 30^{0} = 60^{0}$

3. Trên hình 21: $\hat{3} = \hat{4}$ (đối đỉnh) mà $\hat{1} + \hat{2} + \hat{4} = 180^{0}$

$\Leftrightarrow \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^{0}$

4. Trên hình 23. $\widehat{MOA} = \widehat{BON}, \widehat{BOC} = \widehat{AOD} = 120^{0}$ (Hai cặp góc đối đỉnh)

Ta có $\widehat{MOD} = \widehat{MOA} + \widehat{AOD} = 32^{0} + 120^{0} = 152^{0}$ (do tia OA nằm giữa hai tia OM và OD)

$\widehat{AON} = \widehat{MON} - \widehat{MOA} = 180^{0} - 32^{0} = 148^{0}$

$\widehat{DOB} = \widehat{COD} - \widehat{BOC} = 180^{0} - 120^{0} = 60^{0}$

$\widehat{DON} = \widehat{DOB} - \widehat{BON} = 60^{0} - 32^{0} = 28^{0}$

5. b) Vẽ tia MD là tia đối của tia MC được $\widehat{AMD}$ kề bù $\widehat{AMC}$.

Vẽ tia MB là tia đối của tia MA được $\widehat{CMB}$ kề bù $\widehat{AMC}$

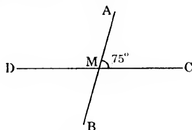
c) Các cặp góc đối đỉnh là : $\widehat{AMC}$ và $\widehat{BMD}$; $\widehat{AMD}$ và $\widehat{BMC}$

d) $\widehat{AMC} + \widehat{AMD} = 180^{0} \Rightarrow$

$75^{0} + \widehat{AMD} = 105^{0}$ (vì $\widehat{AMC}$ kề bù $\widehat{AMD}$)

$\widehat{AMC} = \widehat{BMD} = 75^{0}$;

$\widehat{AMD} = \widehat{BMC} = 105^{0}$ (vì 2 góc đối đỉnh thì bằng nhau)



Hình 25

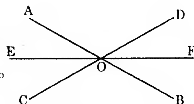
6. a) $\widehat{AOD} + \widehat{AOC} = \widehat{COD}$

$\Rightarrow \widehat{AOD} + 70^{0} = 180^{0}$

$\Rightarrow \widehat{AOD} = 110^{0}$ (vì $\widehat{AOD}$ kề bù $\widehat{AOC}$)

b) $\widehat{AOE} = \widehat{EOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \frac{1}{2}\ 70^{0} = 35^{0}$

(vì OE là phân giác của $\widehat{AOC}$)

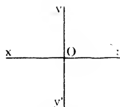


Hình 26

$\widehat{AOE} = \widehat{BOF} = 35^{0}$, $\widehat{EOC} = \widehat{DOF} = 35^{0}$

(vì hai góc đối đỉnh thì bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{BOF} = \widehat{DOF}$ mà tia OF nằm giữa 2 tia OB và OD. Vậy OF là tia phân giác của $\widehat{BOD}$.

7. $\widehat{xOy} = \widehat{yOx'} = \frac{1}{2}\widehat{xOx'} = \frac{1}{2}.180^o = 90^o$ (vì Oy là tia phân giác của $\widehat{xOx'}$)



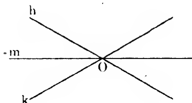
Hình 27

$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'} = 90^o$; $\widehat{yOx'} = \widehat{xOy'} = 90^o$

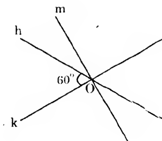
(vì hai góc đối đỉnh thì bằng nhau).

Vậy $\widehat{xOy} = \widehat{yOx'} = \widehat{x'Oy'} = \widehat{xOy'} = 90^o$.

8.



a)



b)

Hình 28

TH_1 : đường thẳng m nằm trong góc nhọn (h.28a). Vậy $\widehat{mOh} = 30^o \Rightarrow \widehat{mOk} = 30^o$ (do $\widehat{hOk} = 60^o$).

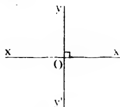
Do đó góc giữa hai đường thẳng m, k bằng 30^o.

TH2 : đường thẳng m nằm trong góc tù (h.28b) $\widehat{hOm} = 30^o$ tia Oh nằm giữa hai tia Om và Ok $\Rightarrow \widehat{mOk} = \widehat{kOh} + \widehat{mOh}$

$= 60^o + 30^o = 90^o$.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

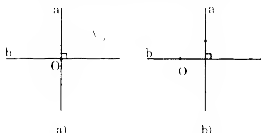


Hình 29

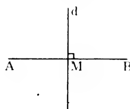
1. Định nghĩa. Hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc (h.29)

2. Vẽ hai đường thẳng vuông góc

• Có một và chỉ một đường thẳng b qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a cho trước (h.30).



Hình 30



Hình 31

3. Đường trung trực của đoạn thẳng

Đường thẳng d đi qua trung điểm M của đoạn thẳng AB và d ⊥ AB thì d gọi là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Vậy đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm gọi là *đường trung trực* của đoạn thẳng ấy (h.31).

II. BÀI TẬP

1. Cho $\widehat{xOy} = 140^0$. Vẽ tia Oz nằm giữa 2 tia Ox và Oy sao cho Oz ⊥ Oy. Vẽ tia Ot nằm giữa 2 tia Ox và Oy sao cho Ot ⊥ Ox.
   a) Trong 3 tia Oy, Oz, Ot thì tia nào nằm giữa 2 tia còn lại ? Vì sao ?
   b) Tính số đo góc zOt.

2. Cho đoạn thẳng AB = 4cm và điểm O nằm giữa A và B sao cho OA = 2 cm. Kẻ đường thẳng EF đi qua O sao cho tia OE là tia phân giác của $\widehat{AOB}$. Hỏi đường thẳng EF có phải là trung trực của đoạn thẳng AB không ? Vì sao ?

3. Hai đường thẳng a và b cùng là trung trực của đoạn thẳng MN thì phân biệt hay trùng nhau ? Vì sao ?

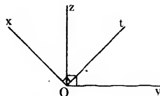
4. Cho đường thẳng a. Hai đường thẳng b và c phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng a. Chứng minh rằng b và c không cắt nhau.

5. Đường thẳng a cắt hai cạnh của góc A tại P và Q. Hai đường thẳng AP và AQ có cùng vuông góc với đường thẳng a được không ? Vì sao ?

6. Qua điểm A không nằm trên đường thẳng a, ta vẽ ba đường thẳng cắt đường thẳng a. Chứng minh rằng có ít nhất hai đường thẳng không vuông góc với a.

Hướng dẫn giải

1. a) Vì tia Ot nằm giữa hai tia Ox và Oy, nên $\widehat{xOt} + \widehat{tOy} = \widehat{xOy} \Rightarrow 90^o + \widehat{tOy} = \widehat{xOy} \Leftrightarrow 90^o + \widehat{tOy} = 140^o \Rightarrow \widehat{tOy} = 50^o$. Xét nửa mặt phẳng bờ Oy ta có $\widehat{tOy} = 50^o < 90^o = \widehat{zOy}$ nên tia Ot nằm giữa hai tia Oz và Oy.

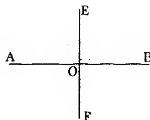


Hình 32

b) Vì tia Ot nằm giữa hai tia Oz và Oy nên ta có $\widehat{zOt} + \widehat{tOy} = \widehat{zOy}$. $\Rightarrow \widehat{zOt} = \widehat{zOy} - \widehat{tOy} = 90^o - 50^o = 40^o$. Vậy $\widehat{zOt} = 40^o$.

2. Vì O nằm giữa A và B nên OA + OB = AB $\Rightarrow$ OB = AB – OA = 4 – 2 = 2 (cm). Vậy OA = OB = 2 cm và O nằm giữa A và B nên O là trung điểm của đoạn thẳng AB (1)

Vì OE là phân giác của $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{AOE} = \widehat{EOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}.\ 180^o = 90^o \Rightarrow$ EF $\perp$ AB (2).



Hình 33

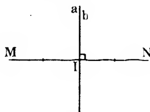
Từ (1) và (2) suy ra EF là trung trực của đoạn thẳng AB.

3. Gọi I là trung điểm của MN

a là trung trực của MN $\Rightarrow$ a đi qua I và a $\perp$ MN (1)

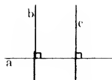
b là trung trực của MN $\Rightarrow$ b đi qua I và b $\perp$ MN (2)

Từ (1) và (2) suy ra a và b trùng nhau (vì có 1 và chỉ 1 đường thẳng đi qua O và vuông góc với MN)



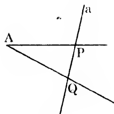
Hình 34

4. Giả sử b và c cắt nhau tại O, vậy qua O ta vẽ được hai đường thẳng b và c cùng vuông góc với a. Điều này trái với khẳng định qua một điểm chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với đường thẳng cho trước. Do đó b và c không cắt nhau được (đpcm).



Hình 35

5. AP và AQ không cùng vuông góc với a. Thật vậy, vì nếu AP và AQ cùng vuông góc với a thì qua điểm A vẽ được hai đường thẳng AP, AQ cùng vuông góc với đường thẳng a (vô lí).



Hình 36

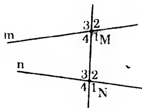
6. Qua điểm A ta chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho. Như vậy qua điểm A vẽ 3 đường thẳng thì có ít nhất 2 đường thẳng không vuông góc với a.

§3. CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Góc sole trong. Góc đồng vị

Đường thẳng a cắt hai đường thẳng m, n tại M, N tạo thành 8 góc. Ta sắp xếp thành từng cặp:



Hình 37

• Hai góc M_1 và N_3 ; M_4 và N_2 được gọi là hai góc so le trong (hai góc nằm trong hai đường thẳng m, n và nằm về hai phía của đường thẳng a)

• Hai góc M_1 và N_1 ; M_2 và N_2... gọi là hai góc đồng vị (một góc nằm trong và một góc nằm ngoài hai đường thẳng m, n và nằm cùng một phía của đường thẳng a)

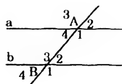
2. Tính chất

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì :

a) Hai góc so le trong còn lại bằng nhau;

b) Hai góc đồng vị bằng nhau.

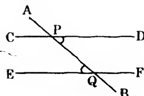
Trên hình 38, nếu $\widehat{A_1} = \widehat{B_3}$ suy ra $\widehat{A_4} = \widehat{B_2}$; $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$...



Hình 38

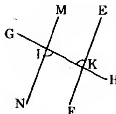
II. BÀI TẬP

1. Ở hình 39, biết $\widehat{DPQ} = \widehat{PQE}$, hai góc nào có đỉnh là P và Q bằng nhau ? Vì sao ?



Hình 39

2. Ở hình 40, biết $\widehat{NIK} = \widehat{IKE}$, hai góc nào có đỉnh là I và K bằng nhau ? Góc nào có đỉnh I bù với góc $\widehat{IKF}$?



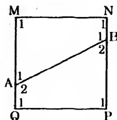
Hình 40

3. Trong hình 41

a) Nêu tên các cặp góc so le trong, các cặp góc đồng vị.

b) Dùng thước đo độ để đo góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$. Chúng có bằng nhau không ?

c) Nếu $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$. Chứng minh $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$.



Hình 41

Hướng dẫn giải

1. Vì $\widehat{DPQ} = \widehat{PQE}$ và là 2 góc so le trong nên hai góc so le trong còn lại bằng nhau : $\widehat{CPQ} = \widehat{PQF}$ và hai góc đồng vị bằng nhau : $\widehat{APC} = \widehat{PQE}$; $\widehat{CPQ} = \widehat{EQB}$; $\widehat{APD} = \widehat{PQF}$ và $\widehat{DPQ} = \widehat{FQB}$.

2. – Vì $\widehat{NIK} = \widehat{IKE}$ và là 2 góc so le trong nên hai góc so le trong còn lại bằng nhau : $\widehat{MIK} = \widehat{IKF}$ và hai góc đồng vị bằng nhau : $\widehat{GIM} = \widehat{IKE}$; $\widehat{MIK} = \widehat{EKH}$; $\widehat{GIN} = \widehat{IKF}$ và $\widehat{NIK} = \widehat{FKH}$.

– Vì $\widehat{MIK} = \widehat{IKF}$ mà $\widehat{MIK}$ bù với $\widehat{MIG}$ và bù với $\widehat{KIN}$ nên $\widehat{MIG}$ bù với $\widehat{IKF}$ và $\widehat{KIN}$ bù với $\widehat{IKF}$.

3. a) Những cặp góc so le trong $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_2$; $\widehat{A}_2$ và $\widehat{B}_1$

Những cặp góc đồng vị $\widehat{N}_1$ và $\widehat{B}_2$; $\widehat{P}_1$ và $\widehat{B}_1$; $\widehat{Q}_1$ và $\widehat{A}_1$, $\widehat{M}_1$ và $\widehat{A}_2$

b) $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 = 60^0$

c) Nếu $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ mà $\widehat{A}_2 = 180^0 - \widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1 = 180^0 - \widehat{B}_2 \Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$.

§4. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa.

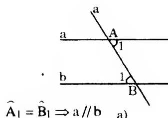
Hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung gọi là hai đường thẳng song song.

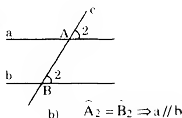
Đường thẳng a và b song song với nhau kí hiệu là a // b.

• Hai đường thẳng phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

2. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc được tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau thì a và b song song với nhau.





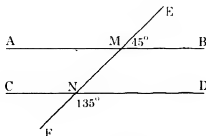
Hình 42

3. Vẽ hai đường thẳng song song

Dùng góc nhọn 60^o của êke để vẽ hai góc sole trong bằng nhau hoặc hai góc đồng vị bằng nhau để được hai đường thẳng song song.

II. BÀI TẬP

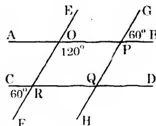
1. Ở hình 43, hai đường thẳng AB và CD có song song không ? Vì sao ?



Hình 43

2. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng. Vẽ đường thẳng a là trung trực của MN và đường thẳng b là trung trực của NP. Có nhận xét gì về hai đường thẳng a và b ? Chứng minh.

3. Ở hình 44, có những cặp đường thẳng nào song song với nhau ? Vì sao ?

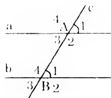


Hình 44

4. Chứng minh rằng hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

5. Cho hai đường thẳng a, b bị cắt bởi đường thẳng c thì $\hat{A}_3$ và $\hat{B}_4$, $\hat{A}_2$ và $\hat{B}_1$ gọi là hai góc trong cùng phía (h.45)

Nếu cho $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$. Chứng minh rằng $\hat{A}_3$ và $\hat{A}_4$ hoặc $\hat{B}_1$ và $\hat{A}_2$ bù nhau.



Hình 45

6. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng a và b bị cắt bởi một đường thẳng c trong các góc được tạo thành có tổng hai góc trong cùng phía bù nhau thì hai đường thẳng a và b song song với nhau.

Hướng dẫn giải

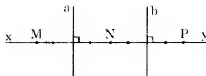
1. $\widehat{FND}$ kề bù với $\widehat{MND}$ nên $\widehat{FND} + \widehat{MND} = 180^0 \Rightarrow \widehat{MND} = 180^0 - \widehat{FND} = 180^0 - 135^0 = 45^0$, mà $\widehat{EMB} = 45^0$ do đó $\widehat{MND} = \widehat{EMB} = 45^0$ và là 2 góc đồng vị. Vậy AB // CD.

2. Ba điểm M, N, P thẳng hàng $\Rightarrow$ M, N, P cũng thuộc đường thẳng xy.

a là trung trực của MN $\Rightarrow$ a $\perp$ MN $\Rightarrow$ a $\perp$ xy (1)

b là trung trực của NP $\Rightarrow$ b $\perp$ NP $\Rightarrow$ b $\perp$ xy (2)

Từ (1) và (2) suy ra a // b.



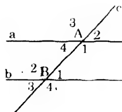
Hình 46

3. – Vì $\widehat{GPB}$ kề bù với $\widehat{GPO}$ nên $\widehat{GPB} + \widehat{GPO} = 180^0 \Rightarrow \widehat{GPO} = 180^0 - \widehat{GPB} = 180^0 - 60^0 = 120^0$ mà $\widehat{POR} = 120^0$, do đó $\widehat{GPO} = \widehat{POR}$ và là 2 góc so le trong (tạo bởi đường thẳng AB cắt hai đường thẳng EF và GH). Vậy EF // GH.

– Vì $\widehat{CRF}$ kề bù với $\widehat{FRQ}$ nên $\widehat{CRF} + \widehat{FRQ} = 180^0 \Rightarrow \widehat{FRQ} = 180^0 - \widehat{CRF} = 180^0 - 60^0 = 120^0$ mà $\widehat{POR} = 120^0$, do đó $\widehat{FRQ} = \widehat{POR}$ và là 2 góc đồng vị (tạo bởi đường thẳng EF cắt hai đường thẳng AB và CD). Vậy AB // CD

4. Xem bài 2

5. $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$ (đối đỉnh) $\Rightarrow$ $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_3$, ta lại có : $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_4 = 2V$ (vì hai góc kề bù, suy ra $\widehat{A}_3 + \widehat{B}_4 = 2v$. Tương tự ta có $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 2v$



Hình 47

6. Hình 47

Cho $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 2v$, chứng minh a // b.

Dễ dàng có $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 2v$ (hai góc kề bù nhau)

mà $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 2v$ (giả thiết)

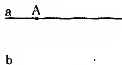
$\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$ ở vị trí đồng vị, suy ra a // b.

§5. TIÊN ĐỀ ƠCLIT VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Tiên đề Ơclit : Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Ở hình 48. Điểm A nằm ngoài đường thẳng a. Đường thẳng b đi qua A và song song với a là duy nhất.



Hình 48

2. Tính chất : Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì

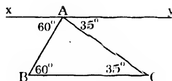
a) Hai góc sole trong bằng nhau.

b) Hai góc đồng vị bằng nhau.

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

II. BÀI TẬP

1. Ở hình bên, hãy giải thích vì sao hai tia Ax và Ay là hai tia đối nhau.



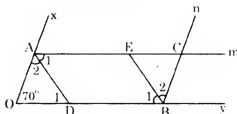
Hình 49

2. Cho hai đường thẳng song song xy // x'y'. Đường thẳng uv cắt xy tại A và cắt x'y' tại B. Vẽ hai tia phân giác Am và Bn của hai góc so le trong. Chứng minh Am // Bn

3. Cho $\widehat{xOy} = 70^o$. Từ điểm A trên cạnh Ox kẻ tia Am // Oy. Từ điểm B trên cạnh Oy kẻ tia Bn // Ox. Hai tia Am và Bn cắt nhau tại C.

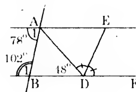
a. Tính số đo của $\widehat{ACB}$.

b) Kẻ tia phân giác của $\widehat{OAC}$ cắt Oy ở D, kẻ tia phân giác của $\widehat{OBC}$ cắt Am tại E. Chứng minh AD // BE.



Hình 50

4. Trên hình 51 DE là đường phân giác của góc ADF. Tính các góc của tam giác ADE.



Hình 51

5. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Chứng minh rằng bất kì đường thẳng nào cắt a thì phải cắt b.

6. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Chứng minh rằng nếu bất kì đường thẳng nào cắt a cũng cắt b thì a và b song song với nhau.

7. Chứng minh rằng một đường thẳng cắt hai đường thẳng tạo nên hai góc so le trong không bằng nhau thì hai đường thẳng đó cắt nhau.

8. Tính tất cả các góc được tạo thành do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song, biết rằng :

a) Hai góc trong cùng phía có tỉ số 1 : 4.

b) Tổng hai góc đồng vị là 140^o.

Hướng dẫn giải

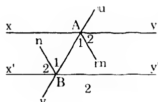
1. $\widehat{xAB} = \widehat{ABC} = 60^o$ và là 2 góc so le trong (tạo bởi đường thẳng AB cắt tia Ax và đường thẳng BC). Vậy Ax // BC (1)

$\widehat{yAC} = \widehat{ACB} = 35^o$ và là 2 góc so le trong (tạo bởi đường thẳng AC cắt tia Ay và đường thẳng BC). Vậy Ay // BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng chứa tia Ax và đường thẳng chứa tia Ay trùng nhau. Suy ra Ax và Ay là 2 tia đối nhau.

2. Am là tia phân giác của $\widehat{yAB}$ nên

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{yAB}$ (1)



Hình 52

Bn là tia phân giác của $\widehat{ABx'}$ nên

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{ABx'}$ (2)

Do xy // x'y' nên hai góc so le trong bằng nhau $\widehat{yAB} = \widehat{ABx'}$ (3) (tạo bởi uv cắt xy và x'y')

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ và là 2 góc so le trong (tạo bởi đường thẳng uv cắt hai tia Am và Bn). Vậy Am // Bn.

3. a) Vì Am // Oy nên Ox cắt Oy và Am tạo thành 2 góc đồng vị bằng nhau : $\widehat{xAm} = \widehat{xOy} = 70^o$

Vì Bn // Ox nên Am cắt Bn và Ox tạo thành 2 góc so le trong bằng nhau : $\widehat{xAm} = \widehat{ACB} = 70^o$.

b) Vì Am // Oy nên Ox cắt Oy và Am tạo thành hai góc trong cùng phía bù nhau : $\widehat{AOB} + \widehat{OAC} = 180^o \Rightarrow \widehat{OAC} = 180^o - \widehat{AOB} = 180^o - 70^o = 110^o$

Vì AD là phân giác của $\widehat{OAC}$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{OAC} = \frac{1}{2}.110^o = 55^o$.

Vì Am // Oy nên AD cắt Oy và Am tạo thành 2 góc so le trong bằng nhau : $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 = 55^o$ (1). Chứng minh tương tự ta có $\widehat{CBO} = 110^o$ và $\widehat{B}_1 = 55^o$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 = 55^o$ và là hai góc đồng vị (tạo bởi Oy cắt AD và BE). Vậy AD // BE.

4. Trước hết xét 2 đường thẳng AE và BF bị cắt bởi đường thẳng AB. Hai góc $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$ là hai góc trong cùng phía, có $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 78^o + 102^o = 180^o$, suy ra AE // BF $\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{EAD} = 48^o$ (hai góc so le trong)

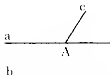
$\widehat{BDA}$ và $\widehat{ADF}$ là hai góc kề bù $\Rightarrow \widehat{ADF} = 180^o - 48^o = 132^o$

DE là phân giác của $\widehat{ADF} \Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{EDF} = \frac{132^o}{2} = 66^o$

$\widehat{AED} = \widehat{EDF} = 66^o$ (Hai góc so le trong)

5. Giả sử có đường thẳng c bất kì cắt a tại A mà không cắt b ⇒ c // b. Từ đó qua A vẽ được hai đường thẳng a, c cùng song song với b trái với tiên đề Ơclit

Do đó c cắt b



Hình 53

6. Giả sử a không song song với b và a cắt b tại M. Tại một điểm A bất kì trên a dựng một đường thẳng c sao cho góc giữa a và c bằng góc giữa a và b đồng thời ở vị trí so le trong ⇒ c // b. Như vậy c cắt a tại A và không cắt b trái với giả thiết của bài toán, suy ra a và b không cắt nhau ⇒ a // b.

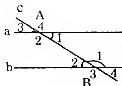
7. Giả sử có đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b trong những góc được tạo thành có cặp góc so le trong không bằng nhau.

Giả sử a // b ⇒ cặp góc so le trong bằng nhau, trái với giả thiết của bài toán ⇒ a và b cắt nhau (đpcm)

8. a) $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$ là hai góc trong cùng phía nên $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 180^o$ (do a // b và bị c cắt)

mà $\dfrac{\widehat{A_1}}{\widehat{B_1}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{\widehat{A_1}}{\widehat{A_1} + \widehat{B_1}} = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow$

$\widehat{A_1} = \dfrac{180^o}{5} = 36^o \Rightarrow \widehat{B_1} = 36^o.4 = 144^o.$



Hình 54

Dễ dàng tính được góc còn lại.

b) $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$ là hai góc so le trong ⇒ $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$ (do a // b và bị c cắt) mà

$\widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 140^o \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_2} = \dfrac{140^o}{2} = 70^o$. HS tự tính các góc còn lại.

§6. TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song

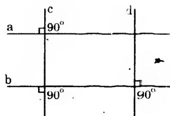
• Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau (xem bài tập 4 § 4).

• Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng phải vuông góc với đường thẳng kia.

2. Ba đường thẳng song song. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

II. BÀI TẬP

1. Ở hình 55, hai đường thẳng a và d có vuông góc với nhau không ? Vì sao ?



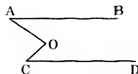
Hình 55

2. Cho góc vuông $\widehat{xAy}$, trên cạnh Ax lấy điểm B, trên cạnh Ay lấy điểm C. Kẻ đường thẳng d_1 là trung trực của đoạn thẳng AB, kẻ đường thẳng d_2 là trung trực của đoạn thẳng AC. Hai đường thẳng d_1 và d_2 có vuông góc với nhau không ? Vì sao ?

3. Ở hình 56 :

a) Biết $\widehat{AOC} = \widehat{BAO} + \widehat{DCO}$, chứng minh AB // CD

b) Biết AB // CD, chứng minh $\widehat{AOC} = \widehat{BAO} + \widehat{DCO}$.



Hình 56

4. Chứng minh rằng nếu hai cạnh của góc này tương ứng song song với hai cạnh của một góc khác thì hai góc đó bằng nhau hoặc bù nhau (2 góc bù nhau là 2 góc có tổng bằng 180°).

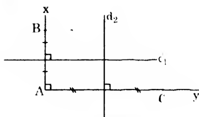
Hướng dẫn giải

1. – a ⊥ c và b ⊥ c nên a // b.

– a // b và d ⊥ b nên d ⊥ a.

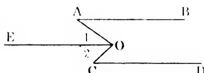
2. – Vì $\widehat{xAy} = 90^\circ$ nên Ax ⊥ Ay mà d_2 ⊥ Ay, suy ra Ax // d_2

– Vì Ax // d_2 và d_1 ⊥ AB nên d_1 ⊥ d_2



Hình 57

3. a) Kẻ OE // AB, đường thẳng AO cắt AB và OE tạo thành 2 góc so le trong bằng nhau : $\widehat{BAO} = \widehat{O_1}$ (1)



Hình 58

Theo đề bài $\widehat{AOC} = \widehat{BAO} + \widehat{DCO}$ (2) và $\widehat{AOC} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2}$ (3)

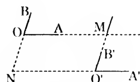
Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{DCO} = \widehat{O_2}$ và là 2 góc so le trong (tạo bởi OC cắt OE và OD). Vậy OE // CD. Suy ra AB // CD (cùng song song với OE).

b) Kẻ OE // AB, theo đề bài AB // CD nên OE // CD

OE // AB $\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{O_1}$ (1). OE // CD $\Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{O_2}$ (2). Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \widehat{BAO} + \widehat{DCO} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{ACO}$ (đpcm)

4. Giả sử cho $\widehat{AOB}$ và $\widehat{A'O'B'}$ có OA // O'A', OB // O'B'.



Hình 59

Ta phải chứng minh $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

Gọi M là giao giữa OA và O'B' thì ta có $\widehat{AMB'} = \widehat{A'O'B'}$ (1) (hai góc so le trong do OA // O'A' bị cắt bởi O'B').

$\widehat{AMB'} = \widehat{AOB}$ (2) (hai góc so le trong do OB // O'B' bị OA cắt)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$.

Ở hình 59 nếu xét $\widehat{AOB}$ và $\widehat{NO'B'}$, hai góc này cũng có OA // O'N, OB // O'B'. Không khó khăn gì ta cũng chứng minh được $\widehat{AOB} + \widehat{NO'B'} = 180^o$.

§7. ĐỊNH LÍ

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định lí : Định lí là một khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.

• Một định lí bao giờ cũng có phần giả thiết và phần kết luận. Điều đã cho của một định lí là phần giả thiết, phần phải suy ra là phần kết luận.

• Một định lí phát biểu dưới dạng. (*Nếu... thì*), phần nằm giữa *nếu* đến *thì* là phần giả thiết. Sau phần *thì* là phần kết luận.

2. Chứng minh định lí. Chứng minh định lí là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.

II. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Phát biểu điều ngược lại. Điều ngược lại có đúng không ?

2. Vẽ hình, ghi giả thiết, ghi kết luận và chứng minh định lí sau :

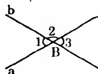
   a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

   b) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường thẳng kia.

   c) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

3. Chứng minh rằng : Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng A không nằm giữa B và C thì khoảng cách từ A đến trung điểm M của đoạn thẳng BC bằng nửa tổng hai đoạn thẳng AB và AC.

Hướng dẫn giải



Hình 60

1. GT $\begin{cases} a \cap b = B \\ \hat{B}_1; \hat{B}_3 \text{ là hai góc đối đỉnh} \end{cases}$

KL $\{\hat{B}_1 = \hat{B}_3$

Chứng minh

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tại B tạo thành một trong hai cặp góc đối đỉnh là $\hat{B}_1$ và $\hat{B}_3$.

Ta có $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^o$ (vì $\hat{B}_1$ và $\hat{B}_2$ là hai góc kề bù)

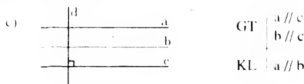
$\hat{B}_3 + \hat{B}_2 = 180^o$ (vì $\hat{B}_3$ và $\hat{B}_2$ là hai góc kề bù)

$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_3$.

Điều ngược lại là hai góc bằng nhau thì đối đỉnh điều này là sai. Chẳng hạn cho góc $\widehat{xOy} \neq 180^o$ và tia Om là tia phân giác thì $\widehat{xOm} = \widehat{mOy}$, nhưng $\widehat{xOm}$ và $\widehat{mOy}$ không phải là góc đối đỉnh.

2. a), b) HS tự làm.

c)

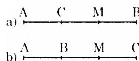


Hình 61

Kẻ đường thẳng d vuông góc với đường thẳng c. Vì d ⊥ c và a // c nên d ⊥ a (1) (một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia). Tương tự vì d ⊥ c và b // c nên ta có d ⊥ b (2). Từ (1) và (2) suy ra a // b (hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau).

3. Xét 2 TH :

• TH_1 : C nằm giữa 2 điểm A, B (h. 62a)



Hình 62

GT: A, B, C thẳng hàng; C nằm giữa 2 điểm, A, B; M là trung điểm của đoạn thẳng BC

KL: $AM = \dfrac{AB + AC}{2}$

Chứng minh

Do C nằm giữa 2 điểm A và B ⇒ AB = AC + CB ⇒ CB = AB − AC

$$AM = AC + CM = AC + \frac{CB}{2} = AC + \frac{AB - AC}{2} = \frac{AB + AC}{2}$$

• TH_2 : B nằm giữa 2 điểm A và C (h.62b)

GT: A, B, C thẳng hàng; B nằm giữa 2 điểm A và C; M là trung điểm của đoạn thẳng BC

KL: $AM = \dfrac{AB + AC}{2}$

Chứng minh

Do B nằm giữa 2 điểm A và C nên AB + BC = AC ⇒ BC = AC − BC. Ta có $AM = AB + BM = AB + \dfrac{BC}{2} = AB + \dfrac{AC - AB}{2} = \dfrac{AB + AC}{2}$.

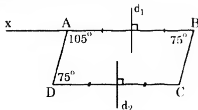
ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Quan sát hình 63 và trả lời các câu sau :

a) Hai đường thẳng AB và CD có song song không ? Vì sao ?

b) Hai đường thẳng AD và BC có song song không ? Vì sao ?

c) Đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 theo thứ tự là trung trực của các đoạn thẳng AB và CD. Hai đường thẳng d_1 và d_2 có song song không ? Vì sao ?



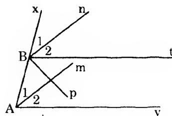
Hình 63

2. Cho $\widehat{xAy}$. Từ điểm B trên cạnh Ax kẻ tia Bt // Ay. Các tia Bn và Am là phân giác của các góc $\widehat{xBt}$ và $\widehat{xAy}$

a) Chứng minh $\widehat{xBn} = \widehat{xAm}$.

b) Chứng minh Bn // Am.

c) Kẻ tia phân giác Bp của góc $\widehat{ABt}$, chứng minh Am và Bp vuông góc với nhau.

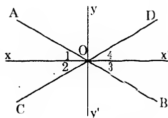


Hình 64

3. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau ở O.

a) Kẻ tia Ox là tia phân giác của $\widehat{AOC}$ và tia Ox' là tia đối của tia Ox. Chứng minh Ox' là tia phân giác của $\widehat{BOD}$.

b) Tia Oy là tia phân giác của $\widehat{AOD}$, tia Oy' là tia phân giác của $\widehat{BOC}$, chứng minh Oy' và Oy là hai tia đối nhau.



Hình 65

4. Cho góc $\widehat{xOy} = 75^o$ trên tia Ox lấy điểm A. Từ điểm A kẻ tia Az tạo với Ax một góc 75^o. Trên tia Az lấy điểm B kẻ tia Bt tạo với Bz góc 105^o. Kẻ AH vuông góc với Oy và CK vuông góc với Az (C là giao của Bt và Oy).

a) Chứng minh : Ax // Oy.

b) Chứng minh : Ox // Bt.

c) Tính các góc của tứ giác OABC.

d) Chứng minh AH // CK.

Hướng dẫn giải

1. Kẻ tia Ax là tia đối của tia AB thì $\widehat{xAD}$ và $\widehat{DAB}$ kề bù nhau $\Rightarrow$ $\widehat{xAD} + \widehat{DAB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{xAD} = 180^0 - \widehat{DAB} = 180^0 - 105^0 = 75^0$

   a) $\widehat{xAD} = \widehat{ADC} = 75^0$ và là 2 góc so le trong (tạo bởi đường thẳng AD cắt hai đường thẳng AB và CD). Vậy AB // CD.

   b) $\widehat{xAD} = \widehat{ABC} = 75^0$ và là 2 góc đồng vị (tạo bởi đường thẳng AB cắt hai đường thẳng AD và BC). Vậy AD // BC.

   c) Vì d_1 là trung trực của AB nên $d_1 \perp AB$, mà AB // CD nên $d_1 \perp CD$ (1)

   Vì d_2 là trung trực của CD nên $d_2 \perp CD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $d_1 // d_2$.

2. a) Vì Bt // Ay nên hai góc đồng vị (tạo bởi Ax cắt Bt và Ay) bằng nhau : $\widehat{xBt} = \widehat{xAy}$ (1)

   Vì Bn là phân giác của $\widehat{xBt}$ nên $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{xBt}$ (2)

   Vì Am là phân giác của $\widehat{xAy}$ nên $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{xAy}$ (3)

   Từ (1), (2), (3) suy ra $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$

   b) Do $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ và là 2 góc đồng vị (tạo bởi Ax cắt Am và Bn). Vậy Bn // Am.

   c) Bn là tia phân giác của $\widehat{xBt}$, Bp là tia phân giác của $\widehat{tBA}$ mà $\widehat{xBt}$ và $\widehat{tBA}$ là 2 góc kề bù. Vậy Bn $\perp$ Bp, mà Bn // Am suy ra Bp $\perp$ Am.

3. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$; $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (hai góc đối đỉnh thì bằng nhau).

   a) Vì Ox là tia phân giác của $\widehat{AOC}$ nên $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (1). Vì Ox và Ox' là 2 tia đối nhau nên $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$ và $\hat{O}_2 = \hat{O}_4$ (2) (hai góc đối đỉnh thì bằng nhau). Từ (1) và (2) suy ra $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$ mà Ox' nằm giữa 2 tia OB và OD. Vậy Ox' là tia phân giác của $\widehat{BOD}$.

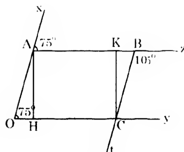
   b) Oy và Ox là 2 tia phân giác của 2 góc kề bù $\widehat{AOD}$ và $\widehat{AOC}$ nên $\widehat{xOy} = 90^0$ (3) vì Ox và Oy' là 2 tia phân giác của 2 góc kề bù $\widehat{AOC}$ và $\widehat{COB}$ nên $\widehat{xOy'} = 90^0$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{xOy} + \widehat{xOy'} = 90^0 + 90^0$ hay $\widehat{yOy'} = 180^0$. Vậy Oy và Oy' là 2 tia đối nhau.

4. a) $\widehat{xAz}$ và $\widehat{xOy}$ ở vị trí đồng vị mà $\widehat{xAz} = \widehat{xOy} = 75^{\circ} \Rightarrow Ax \,//\, Oy$.

b) $\widehat{OAz} = 180^{\circ} - \widehat{xAz} = 180^{\circ} - 75^{\circ} = 105^{\circ}$

($\widehat{OAz}$ và $\widehat{xAz}$ là hai góc kề bù)

$\widehat{OAz}$ và $\widehat{zBt}$ là hai góc ở vị trí đồng vị mà $\widehat{OAz} = \widehat{zBt} = 105^{\circ} \Rightarrow Ox \,//\, Bt$.



Hình 66

c) Trong tứ giác OABC có $\hat{O} = 75^{\circ}$, $\hat{A} = 105^{\circ}$ ($\hat{A}$ chính là góc OAz) $\hat{B}$ là góc kề bù với $\widehat{zBt} = 105^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = 75^{\circ}$. $\hat{C}$ và $\widehat{zBt}$ là hai góc so le trong mà $Az \,//\, Oy \Rightarrow \hat{C} = \widehat{zBt} = 105^{\circ}$.

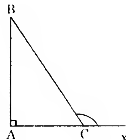
d) $AH \perp Oy$ (1) (giao tuyến), $CK \perp Az$ mà $Az \,//\, Oy \Rightarrow CK \perp Oy$ (định lí) (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \,//\, CK$ (định lí).

Chương II

TAM GIÁC

§1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA



Hình 67

1 Tổng ba góc của một tam giác

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180^o.

2 Áp dụng vào tam giác vuông

- Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.
- Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau

ΔABC, $\widehat{A} = 90^o$, $\hat{B} + \hat{C} = 90^o$.

3 Góc ngoài của tam giác

- Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy ($\widehat{xCB}$ (h. 67))
- Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó

$\widehat{xCB} = \widehat{A} + \hat{B}$

4 Chú ý

Tam giác có ba góc nhọn gọi là tam giác nhọn, tam giác có một góc tù gọi là tam giác tù, tam giác có một góc vuông gọi là tam giác vuông.

II. BÀI TẬP

1. Tìm số đo các góc A, B, C của tam giác ABC, biết rằng chúng tỉ lệ với 6, 7, 5.
2. Chứng minh rằng góc ngoài của một tam giác lớn hơn góc trong không kề với nó.
3. Tìm số đo các góc A, B, C của tam giác ABC biết góc ngoài của $\hat{B}$ và $\hat{C}$ lần lượt là 140^o, 120^o.
4. Cho tam giác có ba góc bằng nhau. Hãy tính số đo mỗi góc của tam giác.

5. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 100^o$, $\widehat{ABC} = 40^o$

a) Tính số đo của $\widehat{ACB}$

b) Kẻ tia phân giác Ax của $\widehat{A}$ cắt BC tại M, chứng minh Ax ⊥ BC tại M.

c) Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt Ax tại E. Chứng minh : $\widehat{AEB} = \widehat{ABC}$.

6. Cho hai đường thẳng song song xx' // yy', đường thẳng uv cắt xx' và yy' tại A và B. Kẻ hai tia phân giác Am và Bn của hai góc trong cùng phía. Chứng minh Am ⊥ Bn.

7. Cho tam giác ABC, phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I.

Chứng minh $\widehat{BIC}$ là góc tù.

8. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Kẻ tia Ax là tia đối của tia AB, tia Cy là tia đối của tia CB, tia Az là tia phân giác của $\widehat{CAx}$. Hai tia phân giác của hai góc $\widehat{CAz}$ và $\widehat{ACy}$ cắt nhau tại E. Tính số đo của góc AEC.

9. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D. Từ D kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia đối của tia AC tại E. Hai tia phân giác của hai góc AED và ABC cắt nhau tại O.

Chứng minh: $\widehat{BOE} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$.

Hướng dẫn giải

1. Theo đề bài ta có : $\frac{A}{6} = \frac{B}{7} = \frac{C}{5}$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{A}{6} = \frac{B}{7} = \frac{C}{5} = \frac{A + B + C}{18} = \frac{180^o}{18} = 10^o$$

Vậy A = $6.10^o = 60^o$

B = $7.10^o = 70^o$

C = $5.10^o = 50^o$.

2. Giả sử $\widehat{A}'$ là góc ngoài của góc A của ΔABC. Vậy

$\hat{A}' = \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}' > \hat{B}$ hoặc $\hat{A}' > \hat{C}$ (do sđ $\hat{B}$ và $\hat{C} > 0$).

3. Góc ngoài của góc $\hat{B}, \hat{C}$ của ΔABC lần lượt là 140^o, $120^o \Rightarrow \hat{B} = 180^o - 140^o = 40^o$, $\hat{C} = 180^o - 120^o = 60^o$ (do góc ngoài của góc của một tam giác là góc kề bù với góc đó)

Ta biết trong tam giác ABC : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o \Rightarrow \hat{A} = 180^o - (\hat{B} + \hat{C})$

$$\hat{A} = 180^o - (40^o + 60^o) = 80^o.$$

4. Gọi x là số đo mỗi góc của tam giác đó. Vậy ta có :

$$x + x + x = 180^o \Leftrightarrow 3x = 180^o$$

$$x = 180^o : 3$$

$$x = 60^o.$$

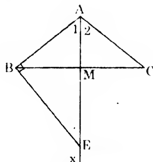
Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì số đo mỗi góc bằng sau này ta sẽ biết tam giác đó là tam giác đều.

5. a) Xét ΔABC, có

$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^o \Rightarrow$

$100^o + 40^o + \widehat{ACB} = 180^o \Rightarrow$

$\widehat{ACB} = 40^o$.



Hình 68

b) Vì Ax là phân giác của $\hat{A}$ nên

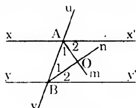
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{1}{2}.100^o = 50^o$.

Xét ΔABM có $\widehat{ABM} + \widehat{BAM} + \widehat{AMB} = 180^o \Rightarrow 40^o + 50^o + \widehat{AMB} = 180^o \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^o \Rightarrow Ax \perp BC$.

c) ΔABE vuông tại B (vì $BE \perp BA$) nên $\hat{A}_1 + \widehat{BEA} = 90^o \Rightarrow 50^o + \widehat{BEA} = 90^o$. Vậy $\widehat{BEA} = 40^o = \widehat{ABC}$.

6. Vì xx' // yy' nên hai góc trong cùng phía (tạo bởi uv cắt xx' và yy') bù nhau :

$\widehat{x'AB} + \widehat{ABy'} = 180^o$ (1) 00



Hình 69

Vì Am là phân giác của $\widehat{x'AB}$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{x'AB}$ (2).

Vì Bn là phân giác của $\widehat{ABy'}$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{ABy'}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\left(\widehat{x'AB} + \widehat{ABy'}\right) = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$

ΔOAB có $\widehat{AOB} + \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$.

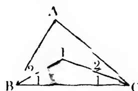
Vậy Am ⊥ Bn.

7. Xét ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow$

$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \Rightarrow 2\widehat{B}_1 + 2\widehat{C}_1 =$

$180^\circ - \widehat{A}$ (vì $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B}$ và

$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}$)



Hình 71

$\Leftrightarrow 0^\circ < \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} < 90^\circ$ (1)

Xét ΔIBC có $\widehat{BIC} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ - \widehat{BIC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $0^\circ < 180^\circ - \widehat{BIC} < 90^\circ$. Suy ra $90^\circ < \widehat{BIC} < 180^\circ$.

Vậy $\widehat{BIC}$ là góc tù.

8. • $\widehat{CAx}$ là góc ngoài của ΔABC nên $\widehat{CAx} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2\widehat{ACB}$

(vì $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$). Ta lại có : $\widehat{CAz} = \widehat{zAx} = \frac{1}{2}\widehat{CAx} = \frac{1}{2}.2\widehat{ACB} = \widehat{ACB}$

Vậy Az // BC. Suy ra $\widehat{ACy} + \widehat{CAz} = 180^\circ$ mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{CAz}$ và

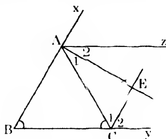
$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{ACy}$ nên

$\widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 = \frac{1}{2}(\widehat{ACy} + \widehat{CAz}) = \frac{1}{2}.180^\circ$

$= 90^\circ$ (1).

• ΔACE có $\widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{E} = 180^\circ$ (2).

• Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEC} = 90^\circ$.



Hình 71

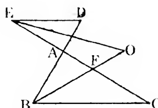
9. DE // BC (giao tuyến) $\Rightarrow \widehat{DEA} = \hat{C}$

Xét ΔFOE và ΔFCB có $\widehat{OFE} = \widehat{CFB}$ (đối đỉnh) nên $\hat{O} + \widehat{OEA} = \hat{C} + \widehat{CBF}$

hay $\hat{O} + \frac{1}{2}\widehat{DEA} = \hat{C} + \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ (vì $\widehat{OEA} = \widehat{OED}$ và $\widehat{CBF} = \widehat{FBA}$) mà $\widehat{DEA} = \hat{C}$ nên

$$\hat{O} + \frac{1}{2}\hat{C} = \hat{C} + \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

Vậy $\widehat{BOE} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$.

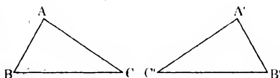


Hình 72

§2. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.



Hình 73

2. Kí hiệu

Để kí hiệu hai tam giác ABC, A'B'C' bằng nhau, ta viết :

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

Khi sử dụng kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác phải chú ý quy ước, các chữ cái chỉ tên các đỉnh tương ứng được viết theo cùng thứ tự. Chẳng hạn ta viết $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ nếu

$$\begin{cases} AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C' \\ \hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

II. BÀI TẬP

1. Cho $\Delta ABC = \Delta EDF$ có $\widehat{A} = 50^o$, BC = 5cm, $\widehat{D} = 70^o$.

a) Tìm số đo của các góc $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{E}, \widehat{F}$.

b) Tìm số đo cạnh DF.

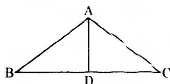
2. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$, $\Delta MNP = \Delta DEF$. Chứng minh rằng $\Delta ABC = \Delta DEF$.

3. Ở hình bên, biết $\Delta ADB = \Delta ADC$.

Chứng minh rằng:

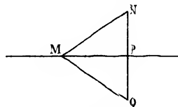
a) AD là phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) Các tam giác ADB và ADC là những tam giác vuông.



Hình 74

4. Ở hình bên, biết $\Delta MPN = \Delta MPQ$. Chứng minh đường thẳng MP là trung trực của đoạn thẳng NQ.



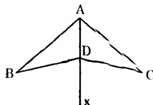
Hình 75

5. Ở hình bên, biết $\Delta ABD = \Delta ACD$. Vẽ tia Dx là tia đối của tia DA.

Chứng minh rằng:

a) Tia Ax là phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) Tia Dx là tia phân giác của $\widehat{BDC}$.



Hình 76

Hướng dẫn giải

1. a) $\Delta ABC = \Delta EDF \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{E} = 50^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 70^o$, $\widehat{C} = \widehat{F}$. Trong ΔABC ta có : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o \Rightarrow \widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B})$

$\widehat{C} = 180^o - (50^o + 70^o) = 60^o \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{F} = 60^o$.

b) Cũng do $\Delta ABC = \Delta EDF \Rightarrow DF = BC = 5$ cm.

2. $\Delta ABC = \Delta MNP \Rightarrow AB = MN,\ AC = MP,\ BC = NP$ (1)

$\hat{A} = \hat{M},\ \hat{B} = \hat{N},\ \hat{C} = \hat{P}$ (2)

$\Delta MNP = \Delta DEF \Rightarrow MN = DE,\ MP = DF,\ NP = EF$ (1')

$\hat{M} = \hat{D},\ \hat{N} = \hat{E},\ \hat{P} = \hat{F}$ (2')

Từ (1) và (1') ta có : $AB = DE,\ AC = DF,\ BC = EF$

Từ (2) và (2') ta có : $\hat{A} = \hat{D},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{C} = \hat{F}$.

Do đó $\Delta ABC = \Delta DEF$.

3. a) $\Delta ADB = \Delta ADC \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ mà tia AD nằm giữa 2 tia AB và AC. Vậy AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) $\Delta ADB = \Delta ADC \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ mà 2 góc kề bù có tổng số đo bằng 180^0. Suy $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0$. Vậy ΔADB và ΔADC vuông.

4. $\Delta MPN = \Delta MPQ \Rightarrow PN = PQ$ (1) và $\widehat{MPN} = \widehat{MPQ} = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0 \Rightarrow$ $MP \perp NQ$ (2). Từ (1) và (2) suy ra MP là trung trực của NQ.

5. $\Delta ABD = \Delta ACD \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ (1)

a) $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ và tia Ax nằm giữa 2 tia AB và AC nên Ax là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) $\widehat{ADB}$ kề bù với $\widehat{BDx}$ nên $\widehat{ADB} + \widehat{BDx} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BDx} = 180^0 - \widehat{ADB}$ (2)

$\widehat{ADC}$ kề bù với $\widehat{CDx}$ nên $\widehat{ADC} + \widehat{CDx} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CDx} = 180^0 - \widehat{ADC}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{BDx} = \widehat{CDx}$ và tia Dx nằm giữa 2 tia DB và DC. Vậy tia Dx là tia phân giác của $\widehat{BDC}$.

§3. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC CẠNH – CẠNH – CẠNH (C.C.C)

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Trường hợp bằng nhau cạnh – cạnh – cạnh

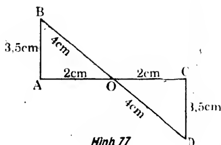
Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có

$AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C' \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

II. BÀI TẬP

1. Cho hình 77, chứng minh rằng AB // CD.

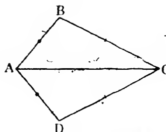


Hình 77

2. Trên hình 78, cho AB = AD, BC = DC

a) Chứng minh AC là phân giác của $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$.

b) Cho $\hat{B} = 100^\circ$ tìm số đo góc D và tổng $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$.



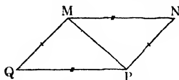
Hình 78

3. Cho góc xOy ≠ 180°. Trên Ox lấy điểm A, trên Oy lấy điểm B sao cho OA = OB. Nối AB, gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh tia OM là phân giác của $\widehat{xOy}$ và đường thẳng OM là trung trực của đoạn thẳng AB.

4. Ở hình bên, biết MN = PQ, MQ = PN

Hãy chứng minh: a) MN // PQ;

b) MQ // PN.



Hình 79

5. Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) có $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính BA và vẽ đường tròn tâm C bán kính CA, chúng cắt nhau ở D, (D ≠ A).

a) Chứng minh BC là phân giác của $\widehat{ABD}$.

b) Tính số đo các góc của tam giác DBC.

Hướng dẫn giải

1. Xét hai tam giác OAB và OCD có OA = OC = 2 cm

AB = CD = 3,5 cm

OB = OD = 4 cm

⇒ ΔOAB = ΔOCD (c.c.c) ⇒ $\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$ ở vị trí so le trong ⇒ AB // CD

2. a) Xét hai tam giác ABC và ADC chúng có

$AB = AD$

$BC = DC$

Cạnh AC chung $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ADC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CAD}$ mà tia AC nằm giữa hai tia AB và AD nên AC là phân giác của góc $\widehat{BAD}$. Cũng chứng minh tương tự AC là phân giác của góc $\widehat{BCD}$.

b) Vì $\Delta ABC = \Delta ADC$ (chứng minh trên) nên $\widehat{D} = \widehat{B} = 100^0$

$\widehat{B} = 100^0 \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^0 - 100^0 = 80^0$. Mà $\widehat{BAD} = 2\widehat{BAC}$, $\widehat{BCD} = 2\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 2(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 2.80^0 = 160^0$.

3. Xét ΔOMA và ΔOMB, có OA = OB (gt), MA = MB (gt), chung cạnh OM, vậy $\Delta OMA = \Delta OMB$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ và $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$.

+ $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ và tia OM nằm giữa 2 tia Ox và Oy, vậy OM là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Hình 80

+ $\widehat{AMO} = \widehat{BMO}$ mà $\widehat{AMO} + \widehat{BMO} = 180^0$ (2 góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{BMO} = 90^0 \Rightarrow OM \perp AB$, mặt khác MA = MB (gt). Vậy đường thẳng OM là trung trực của đoạn thẳng AB.

4. Xét ΔMNP và ΔPQM có MN = PQ (gt), NP = MQ (gt), chung cạnh MP, vậy $\Delta MNP = \Delta PQM$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{NMP} = \widehat{MPQ}$ và $\widehat{MPN} = \widehat{PMQ}$.

a) $\widehat{NMP} = \widehat{MPQ}$ và là 2 góc so le trong (tạo bởi MP cắt MN và PQ) vậy MN // PQ.

b) Tương tự câu a).

5. $\widehat{A} = 90^0$ (gt) $\Rightarrow$

$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$

mà $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ nên

$2\widehat{ACB} + \widehat{ACB} = 90^0$

hay $3\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^0$;

$\widehat{ABC} = 60^0$

Hình 81

Xét ΔABC và ΔDBC có :
BA = BD = bán kính đường tròn tâm B.
CA = CD = bán kính đường tròn tâm C.
Chung cạnh BC. Vậy $\Delta ABC = \Delta DBC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DBC} = 60^\circ$, $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = \widehat{DCB} = 30^\circ$

$\widehat{ABC} = \widehat{DBC}$ mà BC nằm giữa BA và BD nên BC là phân giác của $\widehat{ABD}$.

§4. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC CẠNH – GÓC – CẠNH (c.g.c)

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh (c.g.c)
Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có

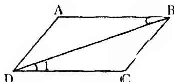
$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

2. Hệ quả. Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

II. BÀI TẬP

1. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường. Hãy chứng minh :
   a) AD // CB và AD = CB
   b) AC // BD và AC = BD

2. Trên hình 82, có AB = DC và $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$
   Chứng minh rằng AD // BC và AD = BC .



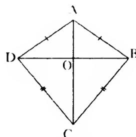
Hình 82

3. Ở hình 83, biết AB = AD ; CB = CD. Chứng minh AC là trung trực của đoạn thẳng BD.

4. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Trên tia phân giác của $\widehat{BAC}$ lấy AD = AB. Trên tia đối của tia AB lấy AE = AC. Nối DE.

a) Chứng minh ΔABC = ΔADE

b) Tia phân giác của $\widehat{EAC}$ cắt EC tại M. Chứng minh đường thẳng AM là trung trực của đoạn thẳng EC.



Hình 83

5. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$). Trên tia đối của tia BC lấy BE = BA. Kẻ EF ⊥ EB và EF = AC (A và F khác phía đối với đường thẳng EC).

a) Chứng minh 3 điểm F ; B ; A thẳng hàng

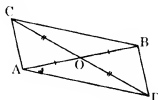
b) Tia phân giác Bx của $\widehat{EBA}$ cắt AE tại M. Tia đối của tia Bx cắt FC tại N. Chứng minh đường thẳng MN là trung trực của các đoạn thẳng EA và FC.

c) Chứng minh EA // FC.

Hướng dẫn giải

1.

GT	AB ∩ CD = O OA = OB OC = OD
KL	AD // CB, AD = CB AC // BD, AC = BD



Hình 84

Chứng minh

Xét 2 tam giác OBC và OAD chúng có OB = OA, OC = OD, $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ (đối đỉnh) ⇒ ΔOBC = ΔOAD (c.g.c)

⇒ BC = AD và $\widehat{OBC} = \widehat{OAD}$ (ở vị trí so le trong) ⇒ AD // BC.

Cũng chứng minh tương tự ta có AC // BD và AC = BD.

2. Xét 2 tam giác ABD và CDB chúng có AB = DC, $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (gt)

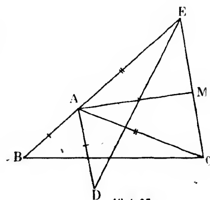
Cạnh BD chung $\Rightarrow \Delta ABD = \Delta CDB \Rightarrow AD = BC$ và $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ (ở vị trí so le trong) $\Rightarrow AD \parallel BC$.

3. Xét ΔABC và ΔADC có AB = AD (gt), CB = CD (gt), chung cạnh AC nên $\Delta ABC = \Delta ADC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DAC}$.

Xét ΔABO và ΔADO có AB = AD, $\widehat{BAO} = \widehat{DAO}$, chung cạnh AO, nên $\Delta ABO = \Delta ADO$ (c.g.c) $\Rightarrow OB = OD$ (1) và $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0 \Rightarrow AC \perp BD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra AC là trung trực của BD.

4. a) Vì AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.120^0 = 60^0$. Vì $\widehat{BAD}$ và $\widehat{DAE}$ kề bù nên $\widehat{BAD} + \widehat{DAE} = 180^0 \Rightarrow$ $\widehat{DAE} = 180^0 - \widehat{BAD}$ $= 180^0 - 60^0 = 120^0 = \widehat{BAC}$

Xét ΔABC và ΔADE có AB = AD, $\widehat{BAC} = \widehat{CAE}$, AC = AE. Vậy : $\Delta ABC = \Delta ADE$ (c.g.c)



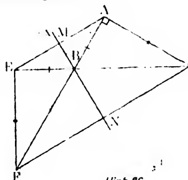
Hình 85

b) Xét ΔAME và ΔAMC có AE = AC ; $\widehat{EAM} = \widehat{MAC}$; chung cạnh AM vậy $\Delta AME = \Delta AMC$ (c.g.c) $\Rightarrow ME = MC$ (1) và $\widehat{AME} = \widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{EMC} = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0 \Rightarrow AM \perp EC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AM là trung trực đoạn thẳng EC.

5. a) Xét ΔABC và ΔEBF có AB = EB ; $\widehat{BAC} = \widehat{BEF} = 90^0$; AC = EF nên $\Delta ABC = \Delta EBF$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{EBF} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ABC} + \widehat{ABE} = 180^0$ nên $\widehat{EBF} + \widehat{ABE} = 180^0$ hay $\widehat{ABF}$ là góc bẹt.

Vậy 3 điểm A, B, F thẳng hàng.



Hình 86

b) Xét ΔMBE và ΔMBA có $BA = BE$; $\widehat{MBA} = \widehat{MBE}$; chung cạnh BM, nên $\Delta MBE = \Delta MBA$ (c, g, c) $\Rightarrow ME = MA$ và $\widehat{BME} = \widehat{BMA} = \frac{1}{2}\widehat{EMA} = \frac{1}{2}.180^{\circ} = 90^{\circ} \Rightarrow Bx \perp AE$ tại M. Vậy Bx là trung trực của AE hay đường thẳng MN là trung trực của AE.

Vì tia BN là tia đối của tia Bx nên $\widehat{MBE} = \widehat{NBC}$ và $\widehat{MBA} = \widehat{NBF}$ (hai góc đối đỉnh thì bằng nhau) mà $\widehat{MBE} = \widehat{MBA}$ nên $\widehat{NBC} = \widehat{NBF}$.

Xét ΔBNF và ΔBNC có $BF = BC$ (vì $\Delta ABC = \Delta EBF$) ; $\widehat{NBC} = \widehat{NBF}$, chung cạnh BN nên $\Delta BNF = \Delta BNC$ (c, g, c) $\Rightarrow NF = NC$ và $\widehat{BNF} = \widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{FNC} = \frac{1}{2}.180^{\circ} = 90^{\circ} \Rightarrow BN \perp FC$. Vậy BN là trung trực của đoạn thẳng FC hay đường thẳng MN là trung trực của đoạn thẳng FC.

c) Theo chứng minh trên : $MN \perp AE$ và $MN \perp FC$. Vậy AE // FC.

§5. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC GÓC – CẠNH – GÓC (G.C.G)

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

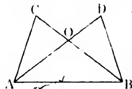
1. Trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

2. Hệ quả

Hệ quả 1. Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề với cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và góc nhọn kề với cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Hệ quả 2. Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



Hình 87

II. BÀI TẬP

1. Trên hình 87, cho $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$, $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$, CA = 3cm. Tính BD.

2. Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$. Trên các cạnh AB và A_1B_1 theo thứ tự lấy điểm D và D_1 sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{A_1C_1D_1}$. Chứng minh rằng $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$.

3. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 120^o$. BN và CM lần lượt là các đường phân giác của $\hat{B}$ và $\hat{C}$. Chứng minh rằng BM + CN < BC.

4. Cho tam giác ABC ($\hat{A}$ tù), trong góc BAC vẽ hai tia Ax và Ay theo thứ tự vuông góc với AC và AB. Trên tia Ax lấy điểm E sao cho AE = AC, trên tia Ay lấy điểm M sao cho AM = AB.
Đường cao AH của tam giác ABC cắt EM tại H', đường cao AD của tam giác AEM cắt BC tại D'.
Chứng minh rằng:
a) Hai tam giác AEH' và CAD' bằng nhau.
b) EH' = H'M.

5. Cho góc $\widehat{xOy}$ ($\neq 180^o$). Trên cạnh Oy lấy điểm B và D (B ở giữa O và D). Trên Ox lấy điểm A sao cho OA = OB. Tia phân giác Oz của $\widehat{xOy}$ cắt AD tại E. Tia BE cắt Ox tại C.
a) Chứng minh OC = OD.
b) Chứng minh AB // CD.

6. Cho góc nhọn mAn. Trên Am lấy điểm B, kẻ BD ⊥ An. Trên An lấy điểm C sao cho AC = AB, kẻ CE ⊥ Am.
a) Chứng minh AD = AE.
b) BD và CE cắt nhau tại K, chứng minh ΔKEB = ΔKDC.
c) Kẻ tia Ax đi qua K, chứng minh tia Ax là phân giác của $\widehat{mAn}$ và tia Kx là phân giác của $\widehat{BKC}$.

7. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^o$. Tia phân giác của $\hat{B}$ cắt AC tại D, tia phân giác của $\hat{C}$ cắt AB tại E. Giao điểm của BD và CE là I.
a) Tính số đo $\widehat{BIC}$.
b) Kẻ tia phân giác của $\widehat{BIC}$ cắt BC tại K. Chứng minh IE = IK = ID.

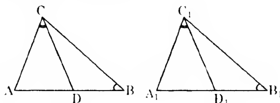
Hướng dẫn giải

1. Xét hai tam giác CAB và DBA chúng có cạnh AB chung $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$, $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$ (gt). Vậy $\Delta CAB = \Delta DBA$ (g.c.g) $\Rightarrow AC = DB = 3cm$

2. Hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\hat{B} = \widehat{B_1}$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (c.g.c)

$\Rightarrow BC = B_1C_1$ và $\widehat{ACB} = \widehat{A_1C_1B_1}$



Hình 88

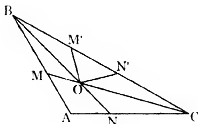
Xét hai tam giác BCD và $B_1C_1D_1$ có $BC = B_1C_1$ (chứng minh trên) $\hat{B} = \hat{B}_1$ (gt), $\widehat{BCD} = \widehat{B_1C_1D_1}$ ($\widehat{ACB} = \widehat{A_1C_1B_1}$ (1) (chứng minh trên, tia CD nằm giữa hai tia CA và CB vì D nằm trên cạnh AB, tương tự tia C_1D_1 nằm giữa hai tia C_1A_1 và C_1B_1, $\widehat{ACD} = \widehat{A_1C_1D_1}$ (gt) (2) mà $\widehat{BCD} = \widehat{ACB} - \widehat{ACD}$ và $\widehat{B_1C_1D_1} = \widehat{A_1C_1B_1} - \widehat{A_1C_1D_1}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{B_1C_1D_1}$. Do đó $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$ (g.c.g)

3. Dễ dàng chứng minh được $\widehat{BOC} = 150^0 \Rightarrow \widehat{CON} = 30^0$.

Trên nửa mặt phẳng chứa điểm B và bờ là đường thẳng CM dựng tia ON', sao cho $\widehat{CON'} = 30^0$ (N' ∈ BC).

Không khó khăn ta chứng minh được $\Delta CON = \Delta CON'$ (g.c.g) $\Rightarrow CN = CN'$.



Hình 89

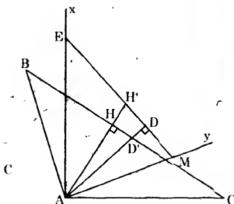
Cũng trên nửa mặt phẳng chứa điểm B bờ là đường thẳng CM vẽ tia CM' sao cho $\widehat{COM'} = 120^0$. Dễ dàng chứng minh dợc $\widehat{BOM'} = 30^0$ và

$\Delta BOM = \Delta BOM'$ (g.c.g), suy ra BM' = BM, mà BC = CN' + N'M' + BM' = CN + NM' + BM.
Do đó BC > BM + CN (do N'M' > 0)

4. a) Xét hai tam giác AEH' và CAD' chúng có AE = AC (gt)

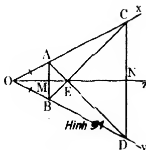
$\widehat{H'EA} = \widehat{D'AC}$ (do hai góc này cùng có phần phụ là $\widehat{DAE}$).

$\widehat{EAH'} = \widehat{D'CA}$ (do hai góc có cùng phần phụ là $\widehat{HAC}$). Do đó $\Delta ADH' = \Delta CAD'$ (g.c.g).
Suy ra EH' = AD' (1)
b) Cũng chứng minh tương tự như a), ta có : $\Delta ABD' = \Delta MAH'$ (g.c.g), suy ra AD' = MH' (2).
Từ (1) và (2) suy ra EH' = H'M.



Hình 90

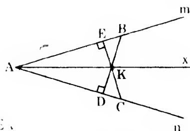
5. a) Xét ΔOAE và ΔOBE có OA = OB ;
$\widehat{AOE} = \widehat{BOE}$, chung cạnh OE,
vậy $\Delta OAE = \Delta OBE$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{OBE}$.
Xét ΔOAD và ΔOBC có
$\widehat{OAD} = \widehat{OBC}$; OA = OB, chung $\widehat{AOB}$, vậy $\Delta OAD = \Delta OBC$ (g.c.g)
$\Rightarrow$ OC = OD.



Hình 91

b) Xét ΔOMA và ΔOMB có OA = OB, $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$, chung cạnh OM nên $\Delta OMA = \Delta OMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OMB} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$
$\Rightarrow OM \perp AB$ hay $Oz \perp AB$ (1). Chứng minh tương tự ta có $Oz \perp CD$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra AB // CD.

6. a) Xét ΔADB và ΔAEC có $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^o$, AB = AC, chung góc A. Vậy $\Delta ADB = \Delta AEC$ (cạnh huyền, góc nhọn)



Hình 92

$\Rightarrow AD = AE$

b) Vì AC = AB và AD = AE nên CD = BE.

Xét ΔKEB và ΔKDC có $\widehat{E} = \widehat{D} = 90^o$,

CD = BE, $\widehat{EBK} = \widehat{DCK}$ (vì $\Delta ADB = \Delta AEC$)

Vậy $\Delta KEB = \Delta KDC$ (g.c.g).

c) Xét ΔABK và ΔACK có AB = AC, $\widehat{ABK} = \widehat{ACK}$; BK = CK. Vậy $\Delta AKB = \Delta AKC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{CAK}$ và $\widehat{AKB} = \widehat{AKC}$ (1)

– Vì $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$ và tia Ax nằm giữa hai tia Am và An nên Ax là tia phân giác của $\widehat{mAn}$.

– Vì $\widehat{AKB}$ kề bù với $\widehat{BKx}$ nên $\widehat{AKB} + \widehat{BKx} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{BKx} = 180^o - \widehat{AKB}$ (2)

Vì $\widehat{AKC}$ kề bù với $\widehat{CKx}$ nên $\widehat{AKC} + \widehat{CKx} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{CKx} = 180^o - \widehat{AKC}$ (3)

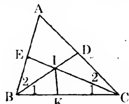
Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{BKx} = \widehat{CKx}$. Vậy Kx là tia phân giác của $\widehat{BKC}$.

7. a) ΔABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^o - \hat{A} = 180^o - 60^o = 120^o$

$\Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 60^o$ hay $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 60^o$

(vì $\hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C}$)



Hình 93

ΔIBC có $\widehat{BIC} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^o \Rightarrow \widehat{BIC} + 60^o = 180^o$

Vậy $\widehat{BIC} = 120^o$.

b) IK là phân giác của $\widehat{BIC}$ nên $\widehat{BIK} = \widehat{KIC} = \frac{1}{2}.\widehat{BIC} = \frac{1}{2}.120^o = 60^o$

vì $\widehat{DIC}$ và $\widehat{EIB}$ kề bù với $\widehat{BIC}$ nên $\widehat{DIC} = \widehat{EIB} = 60^o$.

Xét ΔIBE và ΔIBK có $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$; chung cạnh BI, $\widehat{EIB} = \widehat{KIB} = 60^o$

Vậy $\Delta IBE = \Delta IBK$ (g.c.g) $\Rightarrow$ IE = IK. Chứng minh tương tự ta được $\Delta IDC = \Delta IKC \Rightarrow$ IK = ID. Vậy IE = IK = ID.

§6. TAM GIÁC CÂN

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

2. Tính chất (ΔABC cân có AB = AC còn gọi là tam giác ABC cân tại A, cạnh AB, AC gọi là cạnh bên, cạnh BC gọi là cạnh đáy)

• Định lí 1 : Trong một tam giác cân hai góc ở đáy bằng nhau.

• Định lí 2 : Một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

• Định nghĩa : Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

3. Tam giác đều

• Định nghĩa : Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

• Hệ quả :

* Trong một tam giác đều, mỗi góc bằng 60^o.

* Nếu trong một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

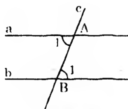
* Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60^o thì tam giác đó là tam giác đều.

4. Định lí thuận, định lí đảo

Xét hai đường thẳng bị cắt bởi đường thẳng thứ ba.

Định lí 1: Nếu hai góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng song song.

Định lí 2: Nếu hai đường thẳng song song thì hai góc so le trong bằng nhau. Viết giả thiết và kết luận của hai định lí trên ta có



Hình 94

Định lí 1 :

GT $\begin{cases} \text{c cắt a, b tại A, B} \\ \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \end{cases}$

KL $\{$ a // b

Định lí 2 :

GT $\begin{cases} \text{c cắt a, b tại A, B} \\ \text{a // b} \end{cases}$

KL $\{ \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

Ta thấy a // b là giả thiết của định lí 2 nhưng là kết luận của định lí 1 và $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ là kết luận của định lí 2 nhưng là giả thiết của định lí 1. Nếu nếu gọi *định lí 1* là *định lí thuận* thì gọi *định lí 2* là *định lí đảo*. Ta có thể gộp hai định lí trên:

c cắt a, b tại A, B: $\widehat{A_1} = \widehat{B_1} \Leftrightarrow a // b$.

Kí hiệu "$\Leftrightarrow$" đọc là *khi và chỉ khi* hoặc *cần và đủ*.

II. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC cân tại A, trên cạnh AB, AC theo thứ tự lấy điểm P và Q sao cho $\widehat{BMP} = \widehat{QMC}$ (M là trung điểm cạnh BC). Chứng minh rằng

a) BP = CQ

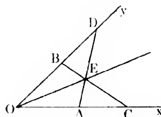
b) PQ // BC

2. Trên các cạnh của góc xOy lấy các điểm A, B, C, D sao cho OA = OB, OC = OD (h.95). BC và AD cắt nhau tại E. Chứng minh rằng

a) OE là phân giác của góc xOy

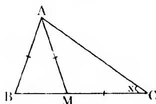
b) AB song song với CD.

c) Từ kết quả của câu a) Nêu cách vẽ đường phân giác của một góc.



Hình 95

3. Ở hình 96, biết $\widehat{BAC} = 60^0$ và AB = AM = MC. Tính số đo các góc B và C của ΔABC



Hình 96

4. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Kẻ BD ⊥ AC. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho AE = AD. Nối EC

a) Chứng minh CE ⊥ AB.

b) BD và CE cắt nhau tại I. Chứng minh ΔIBC và ΔIDE là những tam giác cân.

5. Cho tam giác đều ABC. Kẻ tia phân giác Ax của $\hat{A}$. Kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt Ax tại O

a) Chứng minh ΔOBC là tam giác cân và tính số đo các góc của ΔOBC.

b) Trên cạnh AB lấy điểm E (E nằm giữa A và B), trên tia đối của tia CA lấy điểm F (C nằm giữa A và F) sao cho BE = CF. Hãy chứng minh ΔOEF là tam giác cân.

c) Từ điểm E kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại K. Chứng minh rằng ΔEBK là tam giác đều.

d) EF cắt BC tại I. Chứng minh rằng đường thẳng OI là trung trực của đoạn thẳng EF.

6. Cho tam giác đều ABC. Trên tia AB lấy điểm D sao cho B là trung điểm của AD.

a) Chứng minh tam giác BCD là tam giác cân.

b) Tính các góc của tam giác BCD.

7. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Trên nửa mặt phẳng chứa điểm C có bờ là đường thẳng AB, ta kẻ tia Bx song song với AC. Chứng minh rằng tia BC là tia phân giác của góc ABx.

8. Cho tam giác ABC. Vẽ các tam giác đều ABD và ACE ra phía ngoài tam giác ABC. Nối BE và CD. Gọi M và N là trung điểm của BE và CD. Chứng minh tam giác AMN là tam giác đều.

9. Bên trong tam giác ABC cân tại A lấy điểm M sao cho $\widehat{MBC} = 30^o$, $\widehat{MCB} = 10^o$. Tính góc AMC biết $\widehat{BAC} = 80^o$.

Hướng dẫn giải

1. a) ΔABC cân nên $\hat{B} = \hat{C}$ (định lí)

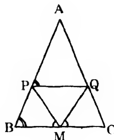
Xét 2 tam giác BPM và CQM chúng có BM = MC (gt), $\hat{B} = \hat{C}$ (t/c của tam giác ABC cân tại A) $\widehat{PMB} = \widehat{QMC}$ (gt)

⇒ ΔBPM = ΔCQM ⇒ BP = CQ.

b) ΔABC cân tại A ⇒ AB = AC (1)

BP = CQ (2) (chứng minh trên)

Từ (1) và (2) suy ra AP = AQ



Hình 97

Trừ vế với vế của (1) và (2) $\Rightarrow$ AP = AQ $\Rightarrow$ ΔAPQ là tam giác cân $\Rightarrow$ $\hat{P} = \hat{Q} = \dfrac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ (3). Từ ΔABC cân tại A ta có $\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $\hat{B} = \hat{P}$ ở vị trí đồng vị.

Do đó PQ // BC.

2. a) Dễ dàng có ΔOBC = ΔOAD (c.g.c) $\Rightarrow$ $\hat{C} = \hat{D}$, $\widehat{OBC} = \widehat{OAD}$ nên $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$.

Sau đó chứng minh ΔEAC = ΔEBD (g.c.g) $\Rightarrow$ EC = ED

Xét 2 tam giác OEC và OED chúng có OC = OD (gt), $\hat{C} = \hat{D}$ (chứng minh trên) và EC = ED. Do đó ΔOEC = ΔOED (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{EOC} = \widehat{EOD}$ và tia OE nằm giữa hai tia Ox, Oy. Vậy OE là tia phân giác của góc xOy.

b) OA = OB (gt) $\Rightarrow$ ΔOAB cân, OC = OD (gt) $\Rightarrow$ ΔOCD cân. Chứng minh tương tự như 1b ta có AB // CD.

c) học sinh tự làm

3. Gọi số đo của $\hat{C}$ là x. Do MA = MC nên ΔMAC cân $\Rightarrow$ $\widehat{MAC} = \hat{C} = x$; $\widehat{AMB}$ là góc ngoài của ΔMAC nên $\widehat{AMB} = \widehat{MAC} + \hat{C} = x + x = 2x$. Do AB = AM nên ΔABM cân $\Rightarrow$ $\hat{B} = \widehat{AMB} = 2x$; ΔABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 40^\circ$. Vậy $\hat{C} = 40^\circ$; $\hat{B} = 80^\circ$.

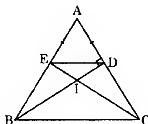
4. a) ΔAEC = ΔADB (vì AB = AC ; $\hat{A}$ chung, AD = AE)

$\Rightarrow$ $\widehat{AEC} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ CE $\perp$ AB.

b) Do ΔAEC = ΔADB nên $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

Do AB = AC và AE = AD nên BE = CD

ΔIBE = ΔICD (vì $\widehat{IEB} = \widehat{IDC} = 90^\circ$, BE = CD ; $\widehat{EBI} = \widehat{DCI}$) $\Rightarrow$ IB = IC và ID = IE. Vậy ΔIBC và ΔIDE là những tam giác cân.



Hình 98

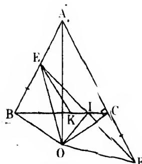
5. a) $\Delta ABO = \Delta ACO$ (vì $AB = AC$; $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, chung cạnh AO)

$\Rightarrow OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân $\Rightarrow$

$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 90^o - 60^o = 30^o \Rightarrow$

$\widehat{BOC} = 180^o - 2.30^o = 120^o$.

b) $\Delta OBE = \Delta OCF$ (vì $OB = OC$; $\widehat{OBE} = \widehat{OCF} = 90^o, BE = CF$) $\Rightarrow$ $OE = OF \Rightarrow \Delta OEF$ cân



Hình 99

c) EK // AC $\Rightarrow \widehat{BEK} = \widehat{BAC} = 60^o$; $\widehat{EBK} = 60^o$.

Vậy ΔEBK đều.

d) Do ΔEBK đều $\Rightarrow \widehat{EKB} = 60^o = \widehat{ACB} \Rightarrow 180^o - \widehat{EKB} = 180^o - \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{EKI} = \widehat{ICF} = 120^o$ và $EK = IB = FC \Rightarrow \Delta IKE = \Delta ICF$ (vì $\widehat{EKI} = \widehat{ICF}$; $EK = CF$; $\widehat{KEI} = \widehat{CFI}$) $\Rightarrow IE = IF$

$\Delta OIE = \Delta OIF$ (vì $IE = IF$, $OE = OF$, chung cạnh OI) $\Rightarrow$

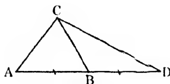
$\widehat{OIE} = \widehat{OIF} = \frac{1}{2}\widehat{EIF} = \frac{1}{2}.180^o = 90^o \Rightarrow OI \perp EF$ mà $EI = IF$. Vậy OI là trung trực của đoạn thẳng EF.

6. (h.100) Ta có $AB = BC = CA = BD$ (theo giả thiết), do đó :

a) Tam giác BCD là cân (vì BC = BD).

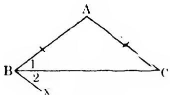
b) Vì $\widehat{ABC} = 60^o$ (góc của tam giác đều), do đó : $\widehat{CBD} = 120^o$ (kề bù với góc 60^o) ;

và $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = \frac{1}{2}(180^o - 120^o) = 30^o$ (vì tam giác BCD cân).



Hình 100

7. (h.101) Ta có $\hat{B}_1 = \hat{C}$ (góc ở đáy của tam giác cân ABC) ; $\hat{B}_2 = \hat{C}$ (góc so le trong vì Bx // AC). Do đó $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Vậy BC là tia phân giác của góc ABx.

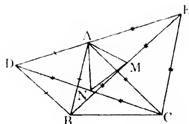


Hình 101

8. $\Delta DAC = \Delta BAE$ (vì $DA = BA$;
$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} = 60^o + \widehat{BAC}$;
$AC = AE$) $\Rightarrow DC = BE$ và $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$

$BM = ME = \frac{1}{2}BE$;

$ND = NC = \frac{1}{2}CD \Rightarrow ME = NC$



Hình 102

$\Delta AME = \Delta ANC$ ($EA = CA$; $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$, $EM = CN$) $\Rightarrow AM = AN$ và $\widehat{EAM} = \widehat{CAN}$ mà $\widehat{EAM} + \widehat{MAC} = 60^o$

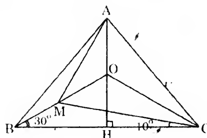
nên $\widehat{CAN} + \widehat{MAC} = \widehat{MAN} = 60^o$. Vậy ΔAMN là tam giác đều.

9. ΔABC cân đỉnh A nên

$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^o - \hat{A}}{2} =$

$\frac{180^o - 80^o}{2} = 50^o$

Vẽ AH là đường phân giác của $\hat{A}$ dễ dàng chứng minh được $AH \perp BC$ và $HB = HC$.



Hình 103

Do AH là đường phân giác của góc A (cách dựng) cho nên ta có

$\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = \frac{80^o}{2} = 40^o$.

Gọi O là giao điểm của đường thẳng BM và AH. Suy ra $\Delta OAC = \Delta OAB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OBA} = 20^o$ ($\widehat{OBA} = \hat{B} - \widehat{MBC} = 50^o - 30^o = 20^o$)

và $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân $\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = 30^o$. Vậy $\widehat{OCM} = \widehat{OCB} - \widehat{MCB} = 30^o - 10^o = 20^o$

$\widehat{OMC} = \widehat{OCB} - \widehat{MCB} = 30^o + 10^o = 40^o$ (góc $\widehat{OMC}$ là góc ngoài của ΔMBC).

Vậy $\widehat{MOC} = 180^o - (40^o + 20^o) = 120^o$. Suy ra $\Delta COM = \Delta COA$ (g.c.g) $\Rightarrow CM = CA \Rightarrow \Delta CAM$ cân tại C, mà $\widehat{MCA} = 50^o - 10^o = 40^o$

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \frac{180^o - 40^o}{2} = 70^o$.

§7. ĐỊNH LÍ PITAGO

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định lí Pitago

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

2. Định lí đảo

Nếu một tam giác có bình phương một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\Delta ABC \text{ có } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

Ví dụ 1. Tính cạnh huyền của tam giác vuông ABC (vuông tại A) biết AB = 6cm, AC = 8cm.

Giải. Áp dụng định lí Pitago vào tam giác ABC vuông tại A

ta có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$\Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10$ (cm).

Ví dụ 2. Tam giác ABC có chu vi là 12 cm, độ dài các cạnh tỉ lệ với 3, 4, 5. Tam giác ABC là tam giác gì ?

Giải. Gọi độ dài các cạnh của tam giác ABC là c, b, a. Theo đề bài ta có :

$$\frac{c}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a}{5}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{c}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a}{5} = \frac{a+b+a}{3+4+5} = \frac{12}{12} = 1$$

Vậy ta có độ dài các cạnh của tam giác ABC là :

c = 1.3 = 3 (cm), b = 1.4 = 4 (cm), a = 1.5 = 5 (cm).

Vậy $a^2 = b^2 + c^2$. Theo định lí Pitago đảo tam giác ABC là tam giác vuông.

Chú ý. Với tam giác ABC người ta thường kí hiệu độ dài các cạnh đối đỉnh với đỉnh A, B, C theo thứ tự là a, b, c.

II. BÀI TẬP

1. Tính cạnh huyền a của tam giác vuông biết các cạnh góc vuông b, c là

a) $b = 6, c = 8$; b) $b = \frac{3}{8}, c = \frac{1}{2}$; c) $b = \sqrt{3}, c = 1$

2. Tính cạnh góc vuông b của tam giác vuông biết cạnh huyền a và cạnh góc vuông c là :

a) $a = 13, c = 12$; b) $a = 9, c = 7$;

c) $a = 2b, c = 12$. d) $a = 2\sqrt{10}, c = 3b$.

3. Cho tam giác ABC, kẻ AH ⊥ BC (H nằm giữa B và C).
Biết AH = 12 cm, HB = 9cm, HC = 16 cm.
a) Tính độ dài các cạnh AB và AC.
b) Chứng minh ΔABC là tam giác vuông.

4. Cho tam giác DEF, kẻ DM ⊥ EF (M nằm giữa E và F)
Biết DE = 7,5 cm, ME : MD = MD : MF = 3 : 4
a) Tính độ dài các đoạn thẳng MD, ME, MF.
b) Chứng minh ΔDEF là tam giác vuông.

5. Từ điểm O thuộc miền trong của ΔABC kẻ OE ⊥ AC, OF ⊥ AB và OG ⊥ BC.
Chứng minh rằng $BG^2 + CE^2 + AF^2 = CG^2 + AE^2 + BF^2$.

6. Cho hình vuông ABCD. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm B bờ là đường thẳng AD vẽ tia AM (M ∈ CD) sao cho $\widehat{MAD} = 20^\circ$. Cũng trên nửa mặt phẳng này vẽ tia AN (N ∈ BC) sao cho $\widehat{NAD} = 65^\circ$. Từ B kẻ BH ⊥ AN (H ∈ AN) và trên tia đối của HB lấy điểm P sao cho HB = HP.
Chứng minh rằng:
a) Ba điểm N, P, M thẳng hàng.
b) Tính các góc của ΔAMN.

7. Cho tam giác vuông ABC, $\widehat{A} = 90^\circ$, hai đường phân giác BM và CN. Từ N, M kẻ các đường NN' và MM' vuông góc với BC (N', M' ∈ BC). Chứng minh $\widehat{M'AN'} = 45^\circ$.

8. Cho tam giác vuông cân ABC, một đường thẳng d đi qua đỉnh A (d ≠ AB, d ≠ AC). Từ B và C kẻ các đường thẳng BB' và CC' vuông góc với d (B', C' ∈ d).

a) Chứng minh rằng BB' + CC' = B'C'.

b) Khi tam giác ABC cố định, tìm vị trí của d để BB' + CC' lớn nhất.

9. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 50^0$, $\hat{B} = 20^0$. Đường phân giác của góc B cắt AC tại E. Trên BE lấy điểm F sao cho $\widehat{FAC} = 30^0$. Gọi I là trung điểm của AF, đường thẳng EI cắt AB tại K, đường thẳng CK cắt BE tại M.

a) Chứng minh KE là đường trung trực của đoạn thẳng AF.

b) So sánh hai tam giác CEB và KEB.

c) Chứng minh $AF^2 + EF^2 = AE\left(MF + \dfrac{KE}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

1. Áp dụng định lí Pitago vào ΔABC vuông tại A ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ hay } a^2 = b^2 + c^2 \quad (*)$$

a) $36 + 64 = 100 \Rightarrow a = \sqrt{100} = 10$

b) $a^2 = \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{64} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{64} \Rightarrow A = \sqrt{\dfrac{25}{64}} = \dfrac{5}{8}$

c) $a^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$

2. Từ (*) ta có $b^2 = a^2 - c^2$

a) $b^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow b = \sqrt{25} = 5$

b) $b^2 = 9^2 - 7^2 = 32 \Rightarrow b = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

c) $b^2 = (2b)^2 - 12^2 = 4b^2 - 144 \Rightarrow 4b^2 - b^2 = 144 \Rightarrow 3b^2 = 144$

$b^2 = 144 : 3 = 48 \Rightarrow b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

d) $b^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 - (3b)^2 \Rightarrow b^2 = 40 - 9b^2 \Rightarrow 10b^2 = 40 \Rightarrow b^2 = 4$

$\Rightarrow b = 2.$

3. a) ΔHAB vuông tại H $\Rightarrow$

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 12^2 + 9^2 =$

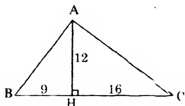
$144 + 81 = 225$

$\Rightarrow AB = 15$ (cm)

ΔHAC vuông tại H $\Rightarrow$

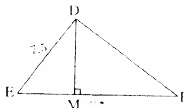
$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 12^2 + 16^2 =$

$144 + 256 = 400 \Rightarrow AC = 20$ (cm)



Hình 104

b) $AB^2 + AC^2 = 225 + 400 = 625$ mà $BC^2 = 25^2 = 625 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.



Hình 105

4. a) $\frac{ME}{MD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{MD}{4} = \frac{ME}{3}$

$\Rightarrow \frac{MD^2}{16} = \frac{ME^2}{9}$

$= \frac{MD^2 + ME^2}{16 + 9} = \frac{DE^2}{25} = \frac{7,5^2}{25} = 2,25$

$\Rightarrow \frac{MD^2}{16} = 2,25 \Rightarrow MD^2 = 16.2,25 \Rightarrow MD = 6$ (cm)

$\Rightarrow ME = \frac{3}{4}MD = \frac{3}{4}.6 = 4,5$ (cm)

$\frac{MD}{MF} = \frac{3}{4} \Rightarrow MF = \frac{4MD}{3} = \frac{4.6}{3} = 8$ (cm).

b) ΔMDF vuông tại M $\Rightarrow DF^2 = MD^2 + MF^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow DF = 10$ (cm)

$DE^2 + DF^2 = 7,5^2 + 10^2 = 156,25 = 12,5^2 = EF^2 \Rightarrow \widehat{EDF} = 90^\circ$

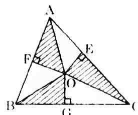
5. ΔBOG vuông tại G $\Rightarrow BO^2 - OG^2 = BG^2$ (1)

ΔCOE vuông tại E $\Rightarrow CO^2 - OE^2 = CE^2$ (2)

ΔAOF vuông tại F $\Rightarrow AO^2 - OF^2 = AF^2$ (3)

Cộng (1), (2), (3) :

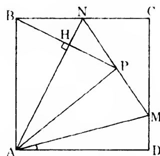
$BG^2 + CE^2 + AF^2 = (BO^2 - OF^2) + (CO^2 - OG^2) + (AO^2 - OE^2) = BF^2 + CG^2 + AE^2$.



Hình 106

6. a) Theo giả thiết $BP \perp AN$ và $HB = HP$, vậy AN là đường trung trực của đoạn thẳng BP. Xét hai tam giác ABN và APN chúng có

$\left.\begin{array}{l} BN = NP \\ AB = AP \end{array}\right\}$ (do AN là đường trung trực của đoạn thẳng BP).



Hình 107

AN chung, nên $\Delta ABN = \Delta APN$ (c.c.c) suy ra $\widehat{APN} = \widehat{B} = 90^o$.
$\widehat{BAN} = \widehat{NAP}$ (1), AB = AP (2).

Ta có $\widehat{MAN} = 65^o - 20^o = 45^o$, nên $\widehat{MAD} + \widehat{NAB} = 45^o$,
$\widehat{MAN} = \widehat{MAP} + \widehat{NAP} = 45^o$ (3)

So sánh (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MAP} = \widehat{MAD} = 20^o$.

Xét hai tam giác MAD và MAP chúng có :

AD = AP (AB = AP chứng minh trên)

AD = AB (cạnh hình vuông)

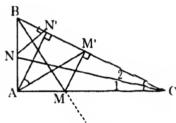
$\widehat{MAD} = \widehat{MAP} = 20^o$

AM chung, nên $\Delta MAD = \Delta MAP$, suy ra $\widehat{MDA} = \widehat{MPA} = 90^o$.

Vậy $\widehat{NPA} + \widehat{MPA} = 90^o + 90^o = 180^o$, do đó ba điểm N, P, M thẳng hàng.

b) Trong tam giác vuông MPA có $\widehat{MAP} = 20^o$, suy ra $\widehat{M} = 70^o$, dễ dàng tính được $\widehat{NAP} = 25^o$, suy ra $\widehat{N} = 65^o$. Nói tóm lại tam giác AMN có $\widehat{A} = 45^o$, $\widehat{M} = 70^o$, $\widehat{N} = 65^o$.

7. Xét hai tam giác vuông CNN' và CNA chúng có $\widehat{C_2} = \widehat{C_1}$ (CN là đường phân giác của góc C).



Hình 108

Cạnh huyền CN chung, vậy $\Delta CNN' = \Delta CNA$ (trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông có cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau), suy ra NN' = NA.

$\Delta ANN'$ là tam giác cân, nên $\widehat{NN'A} = \widehat{NAN'}$. Cũng chứng minh tương tự ta có $\widehat{MM'A} = \widehat{MAM'}$.

$\widehat{ANN'} = \widehat{B} + 90^o$ ($\widehat{ANN'}$ là góc ngoài tại đỉnh N của $\Delta BNN'$)

$\widehat{AMM'} = \widehat{C} + 90^o$ ($\widehat{AMM'}$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\Delta CMM'$ nên ta có :

$$\widehat{NAN'} = \frac{180^\circ - \widehat{ANN'}}{2} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$$

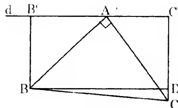
$$+$$

$$\widehat{MAM'} = \frac{180^\circ - \widehat{AMM'}}{2} = 45^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\widehat{NAN'} + \widehat{MAM'} = 90^\circ - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) \text{ mà } \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NAN'} + \widehat{MAM'} = 45^\circ$$

mà $\hat{A} = 90 \Rightarrow \widehat{M'AN'} = 45$.

8. a) Xét hai tam giác ABB' và CAC', chúng có



Hình 109

AB = AC (giả thiết)

$\widehat{BAB'} = \widehat{ACC'}$ (hai góc có cùng một phần phụ).

$\widehat{ABB'} = \widehat{CAC'}$ (do $\hat{B}' = \hat{C}' = 90^\circ$).

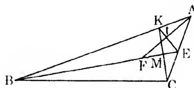
Suy ra $\Delta ABB' = \Delta CAC'$ (g.c.g) $\Rightarrow$ BB' = AC' và AB' = CC'

nên BB' + CC' = AC' + AB' = B'C'

b) Từ B kẻ BD $\perp$ CC' (D $\in$ CC'), BB' $\perp$ d, CC' $\perp$ d $\Rightarrow$ BB' // CC'

Cũng chứng minh tương tự ta có B'C' // BD nên B'C' = BD và $\hat{D} = \hat{C}'$ nên BC > BD. Giá trị lớn nhất của BD là BD = BC khi BD // BC. Vậy BB' + CC' lớn nhất khi d // BC.

9. a) $\hat{B} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ABF} = 10^\circ$



Hình 110

$\hat{A} = 50^\circ$, $\widehat{FAC} = 30^\circ$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{BAF} = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ \Rightarrow$

$\widehat{AFB} = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ$

(vì tổng các góc của ΔABF bằng 180°)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = 30^\circ$ ($\widehat{AFE}$ là góc kề bù với góc AFB)

Vậy ΔAFE là tam giác cân tại E mà I là trung điểm của AF dễ dàng chứng minh được EI $\perp$ AF. Do đó EI là trung trực của đoạn thẳng AF.

Ta dễ dàng tính được $\widehat{AEF} = 120^\circ$ và $\widehat{KEF} = 60^\circ$; $\widehat{BEC} = 60^\circ$

b) Xét hai tam giác CEB và KEB chúng có :

$\widehat{KEB} = \widehat{BEC} = 60^\circ$, $\widehat{CBE} = \widehat{EBK} = 10^\circ$.

Cạnh BE chung. Vậy $\Delta CEB = \Delta KEB$ (g.c.g)

c) Từ kết quả của b) $\Rightarrow$ BC = KB, EC = EK $\Rightarrow$ BE là đường trung trực của đoạn thẳng KC $\Rightarrow$ Tam giác MKE là tam giác vuông.

Từ a) ta có ΔAIE là tam giác vuông tại I nên theo định lí Pitago ta có :

$$AI^2 + EI^2 = AE^2 \text{ mà } AE = EF = ME + MF = MF + \frac{KE}{2}$$

Do đó $AI^2 + EI^2 = AE\left(MF + \frac{KE}{2}\right)$

§8. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông (đã biết)

1) Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

2) Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề với cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề với cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

3) Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

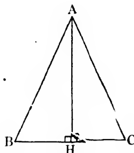
2. Trường hợp bằng nhau về cạnh huyền và cạnh góc vuông

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Ví dụ. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Chứng minh rằng AH cũng là đường phân giác của góc A, cũng là điểm trung trực của cạnh BC.

Giải.

Xét hai tam giác vuông HAB và HAC ta có AB = AC (giả thiết), cạnh AH chung, nên $\Delta HAB = \Delta HAC$ (hai tam giác vuông có cạnh huyền và một cạnh góc vuông bằng nhau).



Hình 111

Suy ra $\widehat{HAB} = \widehat{HAC}$ và tia AH nằm giữa hai tia AB và AC. Vậy AH là đường phân giác của góc A.

Cũng từ $\Delta HAB = \Delta HAC$ nên HB = HC ⇒ H là trung điểm của BC và AH ⊥ BC ⇒ AH là đường trung trực của cạnh BC.

Chú ý: Đoạn thẳng AH mà AH ⊥ BC, (H ∈ BC) gọi là đường cao của ΔABC. Có khi người ta còn gọi đường thẳng AH là đường cao của ΔABC.

II. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng trong một tam giác cân đường cao vẽ từ các đỉnh thuộc cạnh đáy bằng nhau.

2. Chứng minh rằng $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ nếu $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ và BH = B'H' (ở đây BH và B'H' lần lượt là đường cao của tam giác ABC và A'B'C').

3. Trên hai cạnh của góc nhọn O lần lượt lấy điểm A và B sao cho OA = OB. Qua hai điểm này kẻ các đường vuông góc với hai cạnh của góc. Các đường thẳng này cắt nhau tại M. Chứng minh rằng OM là đường phân giác của góc O.

4. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^0$). Kẻ BD ⊥ BA và BD = BA, kẻ CE ⊥ CA và CE = CA (các điểm D, A, E cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC). Kẻ AH ⊥ BC, DK ⊥ BC, EI ⊥ BC.

a) Chứng minh BK = AH = CI và DK + EI = BC.

b) Chứng minh ba điểm D, A, E thẳng hàng.

5. Cho tam giác ABC. Từ B và C kẻ các đường cao BD và CE cắt nhau tại I. Biết BD = CE.

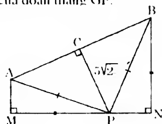
a) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

b) Xác định điểm G sao cho AB là trung trực của GI, xác định điểm F sao cho AC là trung trực của FI. Chứng minh rằng ΔAGF là tam giác cân.

c) Chứng minh đường thẳng AI là trung trực của đoạn thẳng GF.

6. Ở hình 112, biết PA = PB, PM = BN, $\widehat{AMP} = \widehat{PNB} = \widehat{ACP} = 90^0$

a) Chứng minh rằng ΔPAB là tam giác vuông cân.



Hình 112

b) Biết $PC = 5\sqrt{2}$ (cm), tính độ dài các cạnh của ΔPAB.

7. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của các góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau tại O. Kẻ OE ; OF ; OG theo thứ tự vuông góc với các cạnh AC ; AB ; BC.

a) Chứng minh rằng OE = OF = OG.

b) Tia AO cắt cạnh BC tại D. Hãy chứng minh: $\widehat{BOD} = \widehat{COG}$.

8. Cho tam giác ABC. Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$. Biết BE = CF = 8 cm ; độ dài các đoạn thẳng BF và BC tỉ lệ với 3 và 5.

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân.

b) Tính độ dài cạnh đáy BC.

c) BE và CF cắt nhau tại O. Nối AO và EF. Chứng minh rằng đường thẳng AO là trung trực của đoạn thẳng EF.

9. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$). Đường trung trực của cạnh BC cắt tia phân giác Ax của góc A ở điểm O. Kẻ OE ; OF theo thứ tự vuông góc với AB và AC.

a) Chứng minh BE = CF.

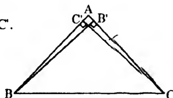
b) Nối EF, cắt BC tại M và cắt Ax tại I. Chứng minh rằng M là trung điểm của cạnh BC.

c) Chứng minh rằng: $IA^2 + IE^2 + IO^2 + IF^2 = AO^2$.

Hướng dẫn giải

1.

GT $\begin{cases} \Delta ABC \text{ có } AB = AC \\ BB' \perp AC, CC' \perp AB \end{cases}$; KL $\{BB' = CC'$.



Hình 113

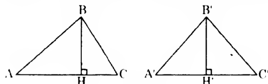
Chứng minh

Xét hai tam giác vuông BCC' và CBB' chúng có $\hat{B} = \hat{C}$ (gt) cạnh huyền BC chung, suy ra $\Delta BCC' = \Delta CBB'$

(Hai tam giác vuông có cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau)

Suy ra CC' = BB'.

2. Xét hai tam giác vuông ABH và A'B'H' chúng có BH = B'H', $\widehat{ABH}$ = $\widehat{A'B'H'}$ (hai góc cùng có cùng phần phụ bằng nhau)

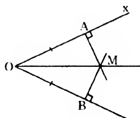


Hình 114

Vậy ΔABH = ΔA'B'H' (hai tam giác vuông có một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề với cạnh ấy bằng nhau). Suy ra AB = A'B'. Hai tam giác ABC và A'B'C' có AB = A'B' (chứng minh trên) $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (gt) ⇒ ΔABC = ΔA'B'C' (g.c.g).

3. Dễ dàng hai tam giác vuông ΔOAM = ΔOBM (có cạnh huyền chung và một cạnh góc vuông bằng nhau)

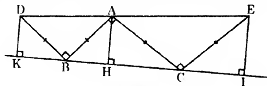
Suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ và tia OM nằm giữa hai tia Ox và Oy nên OM là tia phân giác của góc xOy.



Hình 115

Trường hợp 2 là từ A kẻ đường thẳng vuông góc với Oy và từ B kẻ đường vuông góc với Ox (HS tham khảo bài tập 2).

4. a) $\widehat{KDB} + \widehat{KBD} = 90^o = \widehat{ABH} + \widehat{KBD}$ (vì $\widehat{K} = \widehat{DBA} = 90^o$) ⇒ $\widehat{KDB} = \widehat{ABH}$



Hình 116

ΔKDB = ΔHBA (vì $\widehat{K} = \widehat{H} = 90^o$,

BD = BA ; $\widehat{KDB} = \widehat{ABH}$) ⇒ DK =

BH và BK = AH (1)

Chứng minh tương tự ta được ΔICE = ΔHAC ⇒ EI = CH và CI = AH (2)

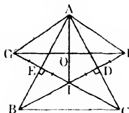
từ (1) và (2) suy ra BK = AH = CI và DK + EI = BH + HC = BC.

b) ΔBAD vuông cân $\Rightarrow \widehat{BAD} = 45^\circ$; ΔCAE vuông cân $\Rightarrow \widehat{CAE} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ \Rightarrow \widehat{DAE} = 180^\circ \Rightarrow$ D, A, E thẳng hàng.

5. a) $\Delta BDC = \Delta CEB$ (vì $\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$, BC chung, BD = CE) $\Rightarrow$ $\widehat{BCE} = \widehat{CBD}$ và $\widehat{EBC} = \widehat{DCB} \Rightarrow \Delta ABC$ cân.

b) $\Delta EGA = \Delta EIA$ (vì EG = EI, $\widehat{GEA} = \widehat{IEA}$, chung AI) $\Rightarrow$ AG = AI.
Tương tự AF = AI $\Rightarrow$ AG = AF $\Rightarrow$ ΔAGF cân.



Hình 117

c) $\widehat{BCE} = \widehat{CBD} \Rightarrow \Delta IBC$ cân $\Rightarrow$ IB = IC

$\Delta IEB = \Delta IDC$ (vì $\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$, IB = IC, $\widehat{DIC} = \widehat{EIB}$) $\Rightarrow$ IE = ID $\Rightarrow$ 2IE = 2ID $\Rightarrow$ IG = IF.

$\Delta GAI = \Delta FAI$ (AG = AF, AI chung, IG = IF) $\Rightarrow \widehat{GAI} = \widehat{IAF}$

$\Delta GOA = \Delta FOA$ (OA chung $\widehat{GAO} = \widehat{FAO}$; AG = AF) $\Rightarrow$ OG = OF

và $\widehat{AOG} = \widehat{AOF} = \frac{1}{2}\widehat{GOF} = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$. Vậy AI là trung trực của GF.

6. a) $\Delta MAP = \Delta NPB$ (vì $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$, AP = BP, MP = NB) $\Rightarrow$ $\widehat{APM} = \widehat{PBN}$

mà $\widehat{BPN} + \widehat{PBN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{APM} + \widehat{BPN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{APB} = 90^\circ \Rightarrow$ ΔPAB vuông cân.

b) ΔPAB vuông cân $\Rightarrow \widehat{PAB} = \widehat{PBA} = 45^\circ$.

ΔPCA có $\widehat{ACP} = 90^\circ$, $\widehat{CAP} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{APC} = 45^\circ$. Vậy ΔCAP vuông cân $\Rightarrow CA = CP = 5\sqrt{2}$. Tương tự ΔCBP vuông cân $\Rightarrow CB = CP = 5\sqrt{2}$ $\Rightarrow AB = AC + CB = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

ΔPAB vuông cân $\Rightarrow PA^2 + PB^2 = AB^2 \Rightarrow 2PA^2 = (10\sqrt{2})^2 \Rightarrow$ $PA^2 = 100 \Rightarrow PA = PB = 10$.

7. a) $\Delta BOF = \Delta BOG$ ($\hat{F} = \hat{G} = 90^0$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, BO chung) => OF = OG.

Cũng chứng minh tương tự ta có OE = OG => OE = OF = OG

b) $\Delta AOE = \Delta AOF$ ($\hat{E} = \hat{F} = 90^0$, AO chung, OE = OF) => $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$,

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A}$; $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}$.

=> $\hat{A}_1 + \hat{C}_2 + \hat{B}_1 = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0$ (1)

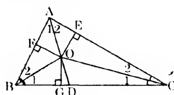
Mặt khác ΔBOG vuông tại G nên $\hat{B}_1 + \widehat{BOG} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{A}_1 + \hat{C}_2 = \widehat{BOG}$ (3)

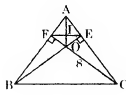
$\widehat{COD}$ là góc ngoài của ΔOAC => $\widehat{COD} = \hat{A}_1 + \hat{C}_2$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BOG} = \widehat{COD} \Leftrightarrow \widehat{BOG} + \widehat{GOD} = \widehat{COD} + \widehat{GOD}$.

Vậy $\widehat{BOD} = \widehat{COG}$.



Hình 118



Hình 119

8. a) $\Delta BFC = \Delta CEB$ (vì $\hat{E} = \hat{F} = 90^0$, BE = CF, chung cạnh BC) => $\widehat{FBC} = \widehat{ECB}$ => ΔABC cân.

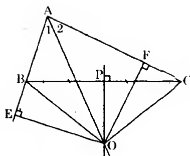
b) $\frac{BF}{3} = \frac{BC}{5} \Rightarrow \frac{BF^2}{9} = \frac{BC^2}{25} = \frac{BC^2 - BF^2}{25 - 9} = \frac{FC^2}{16} = \frac{8^2}{16} = 4$

=> $\frac{BC^2}{25} = 4 \Leftrightarrow BC^2 = 100 \Leftrightarrow BC = 10$ (cm).

c) ΔABC cân => AB = AC mà BF = EC (do $\Delta BFC = \Delta CEB$) => AF = AE.

$\Delta AFO = \Delta AEO$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) => $\widehat{FAO} = \widehat{EAO}$. $\Delta FAI = \Delta EAI$ (vì AF = AE, $\widehat{FAI} = \widehat{EAI}$) => IF = IE (1) và $\widehat{FIA} = \widehat{EIA}$ mà $\widehat{FIA} + \widehat{EIA} = 180^0$ nên $\widehat{FIA} = \widehat{EIA} = 90^0$ => AI ⊥ EF (2).

Từ (1) và (2) suy ra AO là trung trực của đoạn thẳng EF.



Hình 120

9. a) • Xét Δ OAE và ΔOAF có $\widehat{E} = \widehat{F} = 90^o$ (gt).

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt),

chung cạnh OA.

Vậy ΔOAE = ΔOAF (cạnh huyền, góc nhọn)

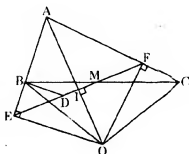
$\Rightarrow$ OE = OF và AE = AF.

• Xét ΔOPB và ΔOPC có BP = PC ; $\widehat{BPO} = \widehat{CPO} = 90^o$ (vì OP là trung trực của BC) ; chung cạnh OP.

Vậy ΔOPB = ΔOPC (c.g.c) $\Rightarrow$ OB = OC.

• Xét ΔBOE và ΔCOF có $\widehat{E} = \widehat{F} = 90^o$ (gt) ; OB = OC ; OE = OF

$\Rightarrow$ ΔBOE = ΔCOF (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow$ BE = CF.



Hình 121

b) Kẻ BD // AC (D $\in$ EF) $\Rightarrow$ $\widehat{BDM} = \widehat{MFC}$; $\widehat{MBD} = \widehat{MCF}$ (2 góc so le trong).

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{BDE} = \widehat{AFE} \\ \Delta AEF \text{ cân (vì } AE = AF) \Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{AFE} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BED} \Rightarrow \Delta BED$$

cân $\Rightarrow$ BE = BD = CF (vì BE = CF)

Xét ΔMBD và ΔMCF có $\widehat{MBD} = \widehat{MCF}$; BD = CF ; $\widehat{BDM} = \widehat{MFC}$

$\Rightarrow$ ΔMBD = ΔMCF (g.c.g) $\Rightarrow$ MB = MC. Vậy M là trung điểm của BC (M trùng với P).

c) Xét ΔAEI và ΔAFI có AE = AF ; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, chung cạnh AI. Vậy ΔAEI = ΔAFI (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{AIE} = \widehat{AIF}$ mà $\widehat{AIE}$ và $\widehat{AIF}$ kề bù $\Rightarrow$ $\widehat{AIE} = \widehat{AIF} = 90^o \Rightarrow AO \perp EF$ tại I.

Áp dụng định lí Pi-ta-go vào các tam giác vuông :

ΔIAE có $\widehat{I} = 90^o \Rightarrow IA^2 + IE^2 = AE^2$ (1)

ΔIAF có $\widehat{I} = 90^o \Rightarrow IA^2 + IF^2 = AF^2$ (2)

ΔIOE có $\hat{I} = 90^\circ \Rightarrow IE^2 + IO^2 = EO^2$ (3)

ΔIOF có $\hat{I} = 90^\circ \Rightarrow IF^2 + IO^2 = OF^2$ (4)

Cộng (1), (2), (3), (4) vế với vế :

$$2(IA^2 + IE^2 + IO^2 + IF^2) = (AE^2 + EO^2) + (AF^2 + FO^2)$$

ΔAFO vuông ở E nên $AE^2 + EO^2 = AO^2$

ΔAFO vuông ở F nên $AF^2 + FO^2 = AO^2$

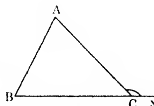
Suy ra $2(IA^2 + IE^2 + IO^2 + IF^2) = AO^2 + AO^2 = 2AO^2$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Tam giác và các tam giác đặc biệt

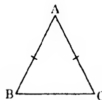
1) Tam giác thường



Hình 122.a

- Tam giác ở hình 122a) là tam giác thường.
- Tam giác có ba góc đều nhọn gọi là tam giác nhọn.
- Tam giác có một góc tù gọi là tam giác tù.
- Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$).
- Góc ACx là góc ngoài của ΔABC, $\widehat{ACx} = \hat{A} + \hat{B}$.

2) Tam giác cân



Hình 122.b

- Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau (h.122b)

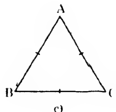
(ΔABC có $AB = AC$ gọi là tam giác cân hay còn gọi là ΔABC cân tại A, AB, AC gọi là cạnh bên, BC gọi là cạnh đáy).

- Trong tam giác cân hai góc ở đáy bằng nhau

ΔABC cân tại A (h.122b) có $\hat{B} = \hat{C}$.

Ngược lại tam giác có hai góc ở đáy bằng nhau là tam giác cân.

3) Tam giác đều



• Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

ΔABC có $AB = AC = BC$ gọi là tam giác đều (h.122c)

• Trong tam giác đều các góc bằng nhau và bằng 60^o. Ngược lại một tam giác có ba góc bằng nhau là tam giác đều.

• Tam giác cân có một góc bằng 60^o là tam giác đều.

4) Tam giác vuông

• Tam giác có một góc vuông gọi là tam giác vuông.

ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$ gọi là tam giác vuông.

• Trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau (tổng hai góc nhọn bằng 90^o)

Hình 122

• Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau gọi là tam giác vuông cân.

(ΔABC, $\widehat{A} = 90^o$, $AB = AC$ (h.122e) gọi là tam giác vuông cân.

Trong tam giác vuông cân có hai góc nhọn bằng nhau và bằng 45^o.

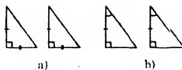
2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác

Tam giác thường

• Trường hợp 1 (c.c.c)

• Trường hợp 2 (c.g.c)

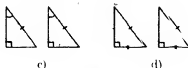
• Trường hợp 3 (g.c.g)



Tam giác vuông

• Hai cạnh góc vuông bằng nhau (h.123a)

• Một góc vuông và một góc nhọn kề với cạnh ấy bằng nhau (h.123b)



Hình 123

• Cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau (h.123c)

• Cạnh huyền và một cạnh góc vuông bằng nhau (h.123d)

3. Định lí Pi-ta-go

ΔABC vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ $(a^2 = b^2 + c^2)$

Định lí đảo

ΔABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $(a^2 = b^2 + c^2)$ $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

II. BÀI TẬP

1. Hãy xác định dạng của tam giác thoả một trong các điều kiện sau.

a) Tổng của hai góc tuỳ ý đều lớn hơn 90.

b) Mỗi một góc đều nhỏ hơn tổng hai góc khác.

2. Cho tam giác ABC

a) Chứng minh rằng : Nếu phân giác của góc A vuông góc với cạnh BC thì tam giác ABC là tam giác cân.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng : Nếu AM vuông góc với BC thì tam giác ABC là tam giác cân.

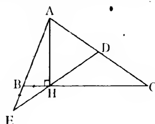
3. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$). Đoạn thẳng nối đỉnh A và điểm D tuỳ ý nằm trên cạnh BC tạo thành tam giác ADB và ADC. Chứng minh rằng hai tam giác này không bằng nhau.

4. Cho ΔABC có $\widehat{ABC} = 2\widehat{C}$. Kẻ $AH \perp BC$. Trên tia đối của BA lấy $BE = BH$. Kẻ đường thẳng EH cắt AC ở D.

a) Chứng minh $\widehat{ABC} = 2\widehat{BHE}$.

b) Chứng minh ΔDHC là tam giác cân.

c) Chứng minh ΔDAH là tam giác cân



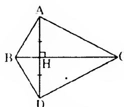
Hình 124

5. Cho ΔABC, kẻ $AH \perp BC$ (H nằm giữa B và C). Kéo dài AH để có $HD = HA$. Nối DB, DC.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta DBC$.

b) Chứng minh rằng:

$$2HA^2 + HB^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2).$$



Hình 125

6. Cho ΔABC và điểm O ở trong tam giác. Xác định các điểm D, E, F sao O là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BE, CF.

a) Chứng minh ba cạnh của ΔABC song song với ba cạnh của ΔDEF.

b) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta DEF$.

7. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC, biết MA = MB = MC.

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

b) Kẻ $Bx \perp BC$, $Cy \perp BC$ (Bx và Cy cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A). Kẻ $ME \perp AB$ và kéo dài cắt Bx tại P, kẻ $MF \perp AC$ và kéo dài cắt Cy tại Q.

Chứng minh ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

8. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 75^o$, kẻ $AH \perp BC$, biết $AH = \frac{1}{2}BC$, kéo dài AH để có HD = HA. Vẽ tam giác đều IAB có đỉnh I thuộc miền trong của ΔABC. Nối BD và IC.

a) Chứng minh ΔBAD là tam giác cân.

b) Chứng minh $\Delta BAD = \Delta IBC$.

c) Chứng minh ΔABC là tam giác cân.

9. Cho tam giác ABC (AB < AC, $\widehat{ABC} \neq 90^o$) ; O là trung điểm của BC. Đường trung trực của cạnh BC cắt AC ở D. Trên tia BD lấy BE = AC (D nằm giữa B và E).

a) Chứng minh AE song song với BC.

b) Hai đường thẳng AB và EC cắt nhau ở S. Chứng minh ba điểm S, D và O thẳng hàng.

10. Cho tam giác ABC và điểm S. Nối SA, SB, SC. Trên các tia đối của các tia SA, SB, SC theo thứ tự lấy SD = SA ; SE = SB ; SF = SC. Nối DE, EF, FD.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta DEF$.

b) Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng BC. Trên tia đối của tia SM lấy SN = SM. Chứng minh ba điểm E, F, N thẳng hàng.

11. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc tù. Kẻ $AD \perp AB$ và AD = AB (tia AD nằm giữa hai tia AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và AE = AC (tia AE nằm giữa hai tia AB và AC). Trung điểm của BC là M. Chứng minh hai đường thẳng AM và DE vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

1. a) Giả sử tam giác có một góc lớn hơn hoặc bằng 90^0 thì tổng hai góc kia nhỏ hơn hoặc bằng 90^0 (vì tổng ba góc của tam giác bằng 180^0, trái với giả thiết tổng hai góc tuỳ ý lớn hơn 90^0). Vậy tam giác không có góc nào lớn hơn hoặc bằng 90^0. Đó chính là tam giác nhọn.

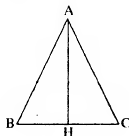
b) Giả sử có tam giác ABC và $\hat{A} \geq 90^0 \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} \leq 90^0$ (và $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$. Như vậy $\hat{A} \geq \hat{B} + \hat{C}$ (trái với giả thiết $\hat{A} < \hat{B} + \hat{C}$). Do đó tam giác thoả mãn điều kiện của bài toán không có góc nào hơn hơn hoặc bằng 90^0. Đó chính là tam giác nhọn. (Phương pháp chứng minh như trên gọi là phương pháp chứng minh bằng phản chứng).

2. a) Giả sử phân giác của $\hat{A}$ là AH và AH ⊥ BC.

Xét hai tam giác vuông ABH và ACH, chúng có $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ (do AH là phân giác của $\hat{A}$) và cạnh góc vuông AH chung suy ra

ΔABH = ΔACH (Hai tam giác vuông có một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề với cạnh đó bằng nhau).

⇒ AB = AC. Vậy ABC cân tại A.



Hình 126

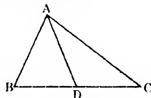
b) Gọi M là trung điểm của BC, giả sử AM ⊥ BC.

Xét 2 tam giác vuông AMB và AMC chúng có MB = MC (gt).

cạnh AM chung ⇒ ΔAMB = ΔAMC (hai tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau) ⇒ AB = AC nên ΔABC là tam giác cân.

3. ΔABC có AB ≠ AC nên tam giác ABC không phải là tam giác cân đỉnh A.

Khi D ở vị trí mà AD ⊥ BC thì hai tam giác vuông ADB và ADC không bằng nhau vì AB ≠ AC (hai cạnh huyền không bằng nhau).



Hình 127

Khi D là điểm tuỳ ý trên BC thì luôn luôn có $\widehat{ADC}$ là góc ngoài của ΔABD nên $\widehat{ADC} = \hat{B} + \widehat{BAD}$ hay $\widehat{ADC} > \hat{B}$, $\widehat{ADC} > \widehat{BAD}$, $\widehat{ADC} \neq \widehat{ADB}$. Vậy ADB không thể bằng ΔADC được.

4. a) BH = BE $\Rightarrow$ ΔBHE là Δ cân $\Rightarrow$ $\widehat{BEH} = \widehat{BHE}$.

mà: $\widehat{ABC}$ là góc ngoài của tam giác BHE $\Rightarrow$

$\widehat{ABC} = \widehat{BEH} + \widehat{BHE} = 2\widehat{BHE}$.

b) Ta có: $\widehat{BHE} = \widehat{DHC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{DHC}$.

Mặt khác: $\widehat{ABC} = 2\widehat{C}$ (gt). Vậy $\widehat{DHC} = \widehat{C}$ hay ΔDHC cân.

c) ΔAHC vuông tại H nên $\widehat{HAD} + \widehat{C} = 90^o$.

$\widehat{AHD} + \widehat{DHC} = 90^o$(gt) và $\widehat{DHC} = \widehat{C}$ (cmt)

Suy ra $\widehat{HAD} = \widehat{AHD}$. Vậy ΔADH cân.

5. a) ΔAHB = ΔDHB (BH chung, $\widehat{AHB} = \widehat{DHB} = 90^o$, AH = HD) $\Rightarrow$ AB = DB.

Chứng minh tương tự ta được AC = DC. Từ đó suy ra ΔABC = ΔDBC.

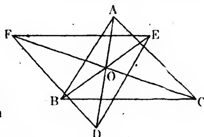
b) Áp dụng định lí Pitago vào các tam giác vuông AHB, AHC, BHD, DHC. Suy ra "đpcm".

6. a) Xét hai tam giác OEF và OBC chúng có OE = OB, OF = OC

$\widehat{EOF} = \widehat{BOC}$ (đối đỉnh).

Vậy ΔOEF = ΔOBC $\Rightarrow$ $\widehat{FEO} = \widehat{CBO}$ ở vị trí so le trong nên EF = BC và EF // BC.

Tương tự FD = AC và FD // AC, DE = AB và DE // AB.



Hình 128

b) Theo chứng minh ở a) ΔABC = ΔDEF (c.c.c)

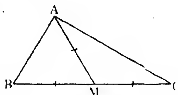
7. a) ΔMAC cân tại M (vì MA = MC (gt))

$\rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{C}$ (1)

MAB cân tại M (vì MA = MB (gt))

$\rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{B}$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$ (3) (do tia AM nằm giữa hai tia AB và AC nên $\widehat{A} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC}$)



Hình 129

Ta đã biết $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. Từ (3) cho ta $2\widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$.

b) Học sinh tự làm

8. a) $\Delta BAH = \Delta BDH$ (vì BH chung, $\widehat{BHA} = \widehat{BHD} = 90^\circ$, HA = HD)

$\Rightarrow$ AB = DB $\Rightarrow$ ΔBAD cân.

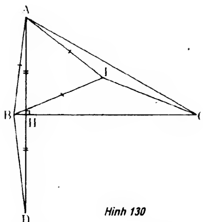
b) ΔBAH có $\widehat{H} = 90^\circ$, $\widehat{ABH} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} = 15^\circ$.

$\widehat{IBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABI} = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$.

$\Delta BAD = \Delta IBC$ (vì BA = IB ; $\widehat{BAD} = \widehat{IBC} = 15^\circ$; AD = 2AH = BC).

c) Từ b) $\Rightarrow$ IC = BD = BA = IB

$\Rightarrow$ ΔIBC cân



Hình 130

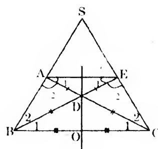
$\Rightarrow \widehat{IBC} = \widehat{ICB} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 360^\circ - (\widehat{AIB} + \widehat{BIC}) = 360^\circ - (60^\circ + 150^\circ) = 150^\circ$.

$\Delta IAC = \Delta IBC$ (vì IA = IB, $\widehat{AIC} = \widehat{BIC} = 150^\circ$; IC chung) $\Rightarrow$ AC = BC

$\Rightarrow$ ΔABC cân tại C.

9. a) $\Delta OBD = \Delta OCD$ (vì OC = OB ; $\widehat{COD} = \widehat{BOD} = 90^\circ$, chung cạnh OD) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (1) và DB = DC, BE = CA (gt) và DB = DC $\Rightarrow$ DE = DA $\Rightarrow$ ΔDAE cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (2).

Hai tam giác cân DBC và DAE có $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow$ $\widehat{A_1} + \widehat{E_1} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ (3).



Hình 131

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow$ AE // BC (hai góc so le trong bằng nhau).

b) $\Delta DAB = \Delta DEC$ (vì DA = DE, $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$; DB = DC) $\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{C_2}$ và AB = EC. Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ và $\widehat{B_2} = \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{SBC} = \widehat{SCB} \Rightarrow \Delta$SBC cân $\Rightarrow$ SB = SC, mà AB = EC nên SA = SE.

Nối SO ta có $\Delta SBO = \Delta SCO$ (vì SB = SC, OB = OC ; SO chung)

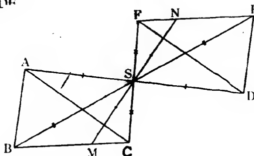
$\Rightarrow \widehat{BSO} = \widehat{CSO} \Rightarrow$ SO là tia phân giác của $\hat{S}$ (4).

– Nối SD ta có ΔSAD = ΔSED (vì SA = SE, DA = DE, SD chung) $\Rightarrow$ $\widehat{DSA} = \widehat{DSE} \Rightarrow$ SD là tia phân giác của $\hat{S}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra hai tia SO và SD trùng nhau. Vậy ba điểm S, D O thẳng hàng.

10. a) Xét ΔSAB và ΔSDE có SA = SD ; $\widehat{ASB} = \widehat{DSE}$ (đối đỉnh), SB = SE $\Rightarrow$ ΔSAB = ΔSDE $\Rightarrow$ AB = DE

Chứng minh tương tự ta có AC = DF ; BC = EF. Vậy ΔABC = ΔDEF (c.c.c).



Hình 132

b) ΔSBC = ΔSEF (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{SBC} = \widehat{SEF}$ mà 2 góc so le trong $\Rightarrow$ EF // BC (1) ΔSBM = ΔSEN (vì SB = SE, $\widehat{BSM} = \widehat{ESN}$; SM = SN) $\Rightarrow$ $\widehat{SBM} = \widehat{SEN}$ mà chúng ở vị trí so le trong $\Rightarrow$ EN // BM $\Rightarrow$ EN // BC (vì M $\in$ BC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai đường thẳng EF và EN trùng nhau. Vậy ba điểm E, N, F thẳng hàng.

11. Kéo dài AM để có MF = MA.

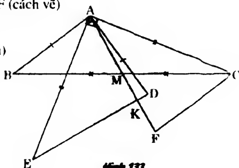
ΔAMB và ΔFMC có MA = MF (cách vẽ)

MB = MC

$\widehat{AMB} = \widehat{FMC}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow$ ΔAMB = ΔFMC (c.g.c)

AB = CF ; $\widehat{ABM} = \widehat{FCM}$



Hình 133

• $\widehat{ABM} = \widehat{FCM}$ => CF // AB (vì hai góc so le trong bằng nhau)

=> $\widehat{FCA} + \widehat{BAC} = 180^0$ (1)

Ta lại có $\widehat{BAD} = \widehat{BAE} + \widehat{EAD} = 90^0$ (vì AD ⊥ AB)

$\widehat{EAC} = \widehat{CAD} + \widehat{EAD} = 90^0$ (vì AE ⊥ AC)

=> $\widehat{BAE} + \widehat{EAD} + \widehat{CAD} + \widehat{EAD} = 90^0 + 90^0$

<=> $\widehat{BAC} + \widehat{EAD} = 180^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FCA} = \widehat{EAD}$.

• Xét ΔADE và ΔCFA có :

AD = CF (vì cùng bằng AB)

$\widehat{EAD} = \widehat{FCA}$ (cmt)

AE = AC (gt)

=> ΔADE = ΔCFA (c.g.c) => $\widehat{CAF} = \widehat{AED}$ mà $\widehat{CAF} + \widehat{FAE} = 90^0$ nên $\widehat{AED} + \widehat{FAE} = 90^0$.

ΔAEK có $\widehat{AEK} + \widehat{KAE} = 90^0$ => $\widehat{AKE} = 90^0$. Vậy AM ⊥ DE.

BÀI TẬP ÔN HỌC KÌ I

1. Tìm x biết

a) $1{,}5|3x - 1| + 4{,}659 = 9{,}103$;

b) $\left[\dfrac{\left(x-4\dfrac{1}{2}\right):0{,}003}{\left(3\dfrac{1}{20}-2{,}65\right).4:\dfrac{1}{5}} - \dfrac{\left(0{,}3-\dfrac{3}{20}\right).1\dfrac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right):\dfrac{1}{8}}\right]:62\dfrac{1}{20}+17{,}81:0{,}0137 \quad 1301 = 0$;

c) $(3x - 7)^{2005} = (3x - 7)^{2007}$.

2. Chứng minh rằng :

Từ tỉ lệ thức $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{b-c}{b+c}$ suy ra $b^2 = a.c$

3. Rút gọn biểu thức sau :

$$P = \frac{49^{24}.125^{10}.2^8 - 5^{30}.7^{49}.4^5}{5^{29}.16^2.7^{48}}$$

4. Ba tổ công nhân A, B, C phải sản xuất cùng một số sản phẩm như nhau. Thời gian 3 tổ hoàn thành kế hoạch theo thứ tự là 14 ngày, 15 ngày và 21 ngày. Tổ A nhiều hơn tổ C là 10 người. Hỏi mỗi tổ có bao nhiêu công nhân ? (năng suất lao động của các công nhân là như nhau).

5. Điểm B(2 ; – 1) thuộc đồ thị hàm số y = ax.

a) Xác định a.

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được và vẽ đồ thị hàm số y = 2x trên cùng một hệ trục toạ độ.

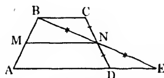
c) Chứng minh hai đồ thị vuông góc với nhau.

6. Cho hai số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng UCLN của a + b và $a^2 + b^2$ là 2. (Thi vô địch lớp 8 Mátxcơva, 1963)

7. Chứng minh rằng m(m + 1) không là luỹ thừa của một số nguyên nào nếu m là số tự nhiên.

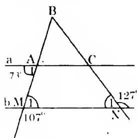
8. Cho $a_1, a_2, ..., a_7$ là các số nguyên và $b_1, b_2, ..., b_7$ cũng là các số nguyên đó nhưng lấy thứ tự khác. Chứng minh rằng $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) ... (a_7 - b_7)$ là số chẵn. (Đề thi Vô địch Anh 1968)

9. Trên hình 134 CN = ND, BN = NE, MN // AD. Chứng minh rằng MN // BC.

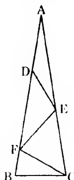


Hình 134

10. Theo hình 135, tính các góc của ΔABC



Hình 135



Hình 136

11. Trên hình 136, có

$AB = AC$ và $AD = DE = EF = FC = BC$. Tính $\widehat{A}$.

12. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho CE = AB. Kẻ các đường trung trực của các đoạn thẳng BE và AC, chúng cắt nhau ở O

a) Chứng minh tia AO là tia phân giác của góc BAC.

b) Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 90^\circ$ thì $AC = OA\sqrt{2}$.

13. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$). Trên tia đối của tia BA lấy BE = AC (B nằm giữa A và E). Kẻ CF vuông góc với CB tại C và CF = CB (A và F khác phía đối với BC). Nối AF và CE cắt nhau tại O. Nối EF.

Chứng minh rằng $OA^2 + OE^2 + OC^2 + OF^2 = \frac{1}{2}(CE^2 + EF^2 + FC^2)$

14. Cho a là cạnh huyền của tam giác vuông, m_b và m_c là các trung tuyến ứng với các cạnh góc vuông. Chứng minh $m_b^2 + m_c^2 = \frac{5a^2}{4}$.

15. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trong tam giác lấy điểm D vẽ tam giác vuông cân DAE ($\widehat{DAE} = 90^\circ$ và E, D nằm về hai phía của AC. Chứng minh rằng:

a) BD = EC.

b) BD vuông góc với EC.

16. Cho tam giác ABC cân tại B và $\widehat{B} = 80^\circ$. Trong tam giác ABC lấy điểm E sao cho ABE là tam giác cân tại A và $\widehat{BAE} = 40^\circ$. Tính góc ECB.

17. Chứng minh các định lí sau :

a) Đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau.

b) Trong một tam giác đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

c) Trong một tam giác, đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

18. Trong tam giác nhọn ABC đường cao lớn nhất AH bằng trung tuyến BM (đoạn thẳng một đầu là đỉnh của tam giác, đầu mút kia là trung điểm cạnh đối diện gọi là trung tuyến).

Chứng minh rằng $\widehat{ABC}$ không lớn hơn 60° (Đề thi vô địch lớp 8 Thilisi năm 1967)

19. Tam giác ABC có $\widehat{C} = 30^0$, đường cao $AH = \frac{1}{2}BC$. Gọi D là trung điểm của cạnh AB. Tìm số đo góc BCD.

Hướng dẫn giải

1. a) $|3x - 1| = (9,103 - 4,659) : \frac{3}{2}$

$|3x - 1| = 4,444 : \frac{3}{2}$

$|3x - 1| = \frac{4444.2}{1000.3} = \frac{4444}{1500}$;

• $3x - 1 = \frac{4444}{1500}$

$3x = \frac{4444}{1500} + 1$

$3x = \frac{5944}{1500}$

$x = \frac{5944}{4500} = \frac{1486}{1125}$.

• $3x - 1 = -\frac{4444}{1500}$

$3x = -\frac{4444}{1500} + 1$

$x = -\frac{2944}{4500} = -\frac{736}{1125}$.

b) $\left[\frac{\left(x - \frac{9}{2}\right) : \frac{3}{1000}}{8} - \frac{\frac{225}{1000}}{32}\right] : \frac{6205}{100} + 1300 - 1301 = 0$

$\Rightarrow \frac{\left(x - \frac{9}{2}\right) : \frac{3}{1000}}{8} = \frac{6205}{100} + \frac{\frac{225}{1000}}{32}$

$\Rightarrow \left(x - \frac{9}{2}\right) : \frac{3}{1000} = \frac{6205}{100}.8 + \frac{\frac{225}{1000}}{32}.8$

$x - \frac{9}{2} = \left(\frac{4964}{10} + \frac{225}{4000}\right)\frac{3}{1000}$

$x = \left(\frac{4964}{10} + \frac{9}{160}\right)\frac{3}{1000} + \frac{9}{2}$

$x = \frac{79433}{160}.\frac{3}{1000} + \frac{9}{2}$

$x = 1{,}48936875 + 4{,}5$

$x = 5{,}98936875$

$x \approx 6.$

c) $(3x - 7)^{2005} = (3x - 7)^{2007} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3} \\ 3x - 7 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3} \\ 3x - 7 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \end{array}\right.$

2. / $\dfrac{a - b}{a + b} = \dfrac{b - c}{b + c} \Leftrightarrow (a - b)(b + c) = (a + b)(b - c)$

$\Leftrightarrow ab + ac - b^2 - bc = ab - ac + b^2 - bc$

$\Leftrightarrow 2b^2 = 2ac \Leftrightarrow b^2 = ac.$

3. $P = \dfrac{7^{48}.5^{30}.2^8(1 - 7.2^2)}{5^{29}.2^8.7^{48}} = 5(1 - 28) = -135.$

4. Gọi số người của tổ A, B, C lần lượt là x, y, z thì x, y, z tỉ lệ nghịch với 14, 15, 21, suy ra x, y, z tỉ lệ thuận với $\dfrac{1}{14}, \dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{21}$, tức là :

$$\frac{x}{\frac{1}{14}} = \frac{y}{\frac{1}{15}} = \frac{z}{\frac{1}{21}} = \frac{x - z}{\frac{1}{14} - \frac{1}{21}} = \frac{10}{\frac{1}{42}} = 420$$

Vậy số người của mỗi tổ là :

Tổ A : $x = 420.\dfrac{1}{14} = 30$ (người)

Tổ B : $y = 420.\dfrac{1}{15} = 28$ (người)

Tổ C : $z = 420.\dfrac{1}{21} = 20$ (người)

ĐS : 30 ; 28 ; 20 (người)

5. a) Điểm B(2 ; −1) thuộc đồ thị hàm $y = ax$, tức là $-1 = a.2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$.

b) • Vẽ đồ thị hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x$ cho $x = 2 \Rightarrow y = -1$ A(2 ; −1)

• Vẽ đồ thị hàm số y = 2x

Cho x = 1 ⇒ y = 2

A'(1 ; 2)

c) Đường thẳng

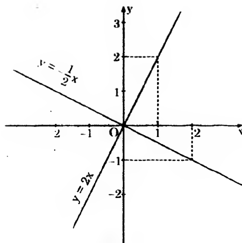
$y = -\frac{1}{2}x$, có hệ số góc

$k_1 = -\frac{1}{2}$.

Đường thẳng y = 2x, có hệ số góc $k_2 = 2$. Ta có

$k_1k_2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$

⇒ Hai đồ thị vuông góc với nhau.



Hình 137

6. Gọi d là ước số chung lớn nhất của (a + b) và $(a^2 + b^2)$ ⇒ $(a + b)^2$ chia hết cho d, nên $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ chia hết cho d, do vậy $2a^2 = 2a(a + b) - 2ab$ chia hết cho d ; $2b^2 = 2b(a + b) - 2ab$ chia hết cho d. Nhưng a, b nguyên tố cùng nhau, nên a^2, b^2 nguyên tố cùng nhau. Vậy $2a^2$, $2b^2$ không thể chia hết cho d > 2, suy ra d lớn nhất là bằng 2.

7. Giả sử m(m + 1) là luỹ thừa bậc k của một số nguyên. Do m, m + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau nên m và (m + 1) phải là luỹ thừa bậc k của một số tự nhiên nào đó. Nhưng điều giả sử này không đúng với $m = a^k$ khi đó $(a + 1)^k > (a + 1)a^{k-1} = a^k + a^{k-1} > m + 1$ (k > 1)

8. Xét các hiệu : $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots a_7 - b_7$. Giả sử các hiệu đều lẻ, vậy ta có tổng 7 số $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_7 - b_7)$ là số lẻ, mà

$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_7 - b_7) =$

$(a_1 + a_2 + \dots + a_7) - (b_1 + b_2 + \dots + b_7) = 0$

Vô lí, suy ra trong các hiệu đó phải có ít nhất một số chẵn.

Do đó $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)...(a_7 - b_7)$ là số chẵn.

9. $\Delta NBC = \Delta NED$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NBC} = \widehat{NED}$ (1)

Do MN // AD $\Rightarrow \widehat{NED} = \widehat{BNM}$ (đồng vị) (2). Từ (1) và (2)

suy ra $\widehat{NED} = \widehat{NBC}$ (ở vị trí so le trong) $\Rightarrow$ MN // BC.

10. $\widehat{M_1} = 180^o - 107^o = 73^o = \widehat{A_1}$ (ở vị trí so le trong)

$\Rightarrow$ a // b. $\widehat{N_1} = 180^o - 127^o = 53^o \Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{C} = 53^o$ (hai góc đồng vị)

$\widehat{BAC} = \widehat{A_1} = 73^o$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^o - (73^o + 53^o) = 54^o$

11. Gọi số đo của góc A vằng x $\Rightarrow \widehat{AED} = x$ (ΔADE cân tại D do AD = DE)

suy ra $\widehat{EDF} = 2x$ (góc ngoài của Δ cân ADE)

ΔEDF cân tại E (do DE = EF) $\Rightarrow \widehat{EFA} = 2x \Rightarrow \widehat{FEC} = 3x$

suy ra $\widehat{FCE} = 3x$ (do ΔEFC cân tại E (EF = FC). $\widehat{BFC} = \widehat{FCE} + \widehat{A}$

($\widehat{BFC}$ là góc ngoài của ΔDEF)

$\widehat{BFC} = 3x + x = 4x$.

Ta lại có $\widehat{BFC} = \widehat{B}$ (ΔBCF cân tại C do FC = BC)

Trong ABC cân tại A (AB = AC) $\Rightarrow \widehat{B} = \dfrac{180^o - x}{2}$...

Do đó ta có : $4x = \dfrac{180^o - x}{2} \Rightarrow 9x = 180^o \Rightarrow x = 20^o$.

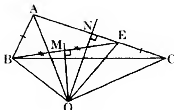
Vậy $\widehat{A} = 20^o$.

12. a) (h.138) $\Delta OMB = \Delta OME$ (vì chung cạnh OM, $\widehat{OMB} = \widehat{OME} = 90^o$, MB = ME) $\Rightarrow$ OB = OE.

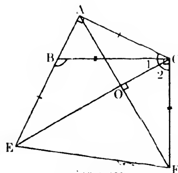
- $\Delta ONA = \Delta ONC$ (vì chung cạnhON, $\widehat{ONA} = \widehat{ONC} = 90^o$, NA = NC) $\Rightarrow$ OA = OC và $\widehat{OAN} = \widehat{OCN}$.

- $\Delta OAB = \Delta OCE$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OCE} = \widehat{OAN}$. Vậy AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

b) Học sinh tự chứng minh



Hình 138



Hình 139

13. $\widehat{CBE}$ là góc ngoài của $\Delta ABC \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = \widehat{BCA} + 90^\circ$ (1)

mà $\widehat{ACF} = \widehat{ACB} + \widehat{BCF} = \widehat{ACB} + 90^\circ$ (2) (h.139)

Từ (1) và (2) suy ra ra $\widehat{CBE} = \widehat{ACF}$

$\Delta EBC = \Delta ACF$ (vì $BE = CA$, $\widehat{CBE} = \widehat{FCA}, BC = CF$) $\Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{C}_1$ mà $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ$ nên $\hat{F}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{COF} = 90^\circ$.

Áp dụng định lí Pi-ta-go vào các tam giác vuông : ΔOAC vuông ($\widehat{AOC} = 90^\circ$) $\Rightarrow OA^2 + OC^2 = AC^2$; ΔAOE vuông ($\hat{O} = 90^\circ$) $\Rightarrow OA^2 + OE^2 = AE^2$; ΔEOF vuông ($\hat{O} = 90^\circ$) $\Rightarrow OE^2 + OF^2 = EF^2$; ΔOCF vuông ($\hat{O} = 90^\circ$) $\Rightarrow OC^2 + OF^2 = CF^2$.

ΔACE vuông ở A ($\widehat{EAC} = 90^\circ$) $\Rightarrow AC^2 + AE^2 = EC^2$

Suy ra : $2(OA^2 + OC^2 + OE^2 + OF^2) = AC^2 + AE^2 + EF^2 + FC^2$

Vậy $OA^2 + OC^2 + OE^2 + OF^2 = \frac{1}{2}(EC^2 + EF^2 + FC^2)$

14. Áp dụng định lí Pi-ta-go vào các tam giác vuông, dễ dàng có

$$+\begin{array}{l} m_b^2 = c^2 + \dfrac{b^2}{4} \\ m_c^2 = b^2 + \dfrac{c^2}{4} \end{array}$$

$$m_b^2 + m_c^2 = b^2 + c^2 + \frac{b^2 + c^2}{4} = \frac{5(b^2 + c^2)}{4} \quad (1)$$

Trong tam giác vuông với a là cạnh huyền b, c là cạnh góc vuông ta có $a^2 = b^2 + c^2$ (2).

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh (đpcm)

15. a) Xét 2 tam giác ABD và ACE chúng có
AB = AC (gt) AD = AE
gt $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (hai góc cùng có phần phụ là góc $\widehat{CAD}$)
⇒ ΔABD = ΔACE (c.g.c) ⇒ BD = EC

b) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$

$\widehat{DEC} = \widehat{AEC} - \widehat{AED} = \widehat{AEC} - 45^o$ (do ΔADE vuông cân tại A)

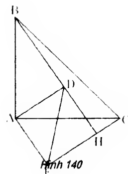
$= \widehat{ADB} - 45^o$ (1)

$\widehat{EDH} = 180^o - (\widehat{ADB} + 45^o) = 135^o - \widehat{ADB}$ (2)

Cộng vế với vế (1) và (2), ta có

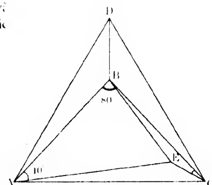
$\widehat{DEC} + \widehat{EDH} = \widehat{ADB} - 45^o + 135^o - \widehat{ADB} = 90^o$.

suy ra $\widehat{DHE} = 90^o$. Do đó BD ⊥ EC.



Hình 140

16. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm B về bờ là đường thẳng AC vẽ tam giác đều ADC.
Dễ dàng chứng minh được
ΔADB = ΔCDB (c.c.c)
⇒ $\widehat{ADB} = \widehat{CDB} = 30^o$
(do $\widehat{ADC} = 60^o$)
Cũng không khó khăn ta chứng minh được ΔABD = ΔAEC (c.g.c)
(chú ý $\widehat{BAD} = \widehat{EAC} = 10^o$)
⇒ $\widehat{ADB} = \widehat{ACE} = 30^o$.
Vậy: $\widehat{ECB} = \widehat{ACB} - \widehat{ACE} = 50^o - 30^o = 20^o$



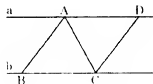
Hình 141

17. 1) GT $\begin{cases} a // b \\ AB // CD \end{cases}$ KL : AB = CD

Chứng minh

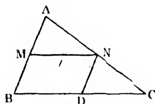
Dễ dàng chứng minh được ΔABC = ΔCDA (g.c.g)

⇒ AB = CD



Hình 142

2) GT $\begin{cases} \Delta ABC \\ M \in AB, N \in AC \\ MA = MB \\ MN // BC \end{cases}$ KL $\{NA = NC$



Hình 143

Chứng minh

Từ N kẻ ND // AB (D ∈ BC) theo 1) ta có ND = MB

mà MA = MB => ND = MA.

Xét hai tam giác AMN và NDC chúng có MA = ND (chứng minh trên) $\widehat{A} = \widehat{N}$ (đồng vị) $\widehat{M} = \widehat{D}$ (cùng bằng $\widehat{B}$) => ΔAMN = ΔNDC => AN = NC (đpcm).

3) GT $\begin{cases} \Delta ABC \\ M \in AB, N \in AC \\ MA = MB \\ NA = NC \end{cases}$ KL $\begin{cases} MN // BC \\ MN = \frac{1}{2}BC \end{cases}$

Chứng minh

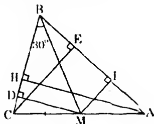
Giả sử MN không song song với BC từ M kẻ MN' // BC theo 2) ta có N'A = N'C => cạnh AC có hai trung điểm N' và N vô lí. Vậy N' ≡ N nên MN // BC.

Theo 2) ΔAMN = ΔNDC => MN = DC. Ta lại có MN = BD (theo 1) => MN = BD = DC hay MN = $\frac{1}{2}$BC.

18. Từ trung điểm M của cạnh CA kẻ MI ⊥ AB, MD ⊥ BC (h.144)

Ta có $\widehat{MBC} = 30^\circ$, BM = AH = 2MD

• Dễ dàng chứng minh được $\widehat{MBI} < 30^\circ$ => $\widehat{ABC} < 60^\circ$. Ta thấy $\widehat{ABC} = 60^\circ$ khi và chỉ khi ΔABC đều. Suy ra (đpcm)



Hình 144

19. Học sinh tự làm.

MỤC LỤC

Trang

PHẦN ĐẠI SỐ

PHẦN HÌNH HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: NGUYỄN VĂN ĐẮC
PHƯƠNG THẢO

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN THCS 7 – TẬP 1

Mã số: 1L - 100 ĐH 2006

In 3.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ti Phát triển Công nghệ và Truyền hình – TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 643 - 2006/CXB/ 3 – 116/ĐHQGHN, ngày 21/08/2006

Quyết định xuất bản số: 265 LK/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2006